1 Rechnen mit ganzen Zahlen

Führen Sie die nachfolgenden Berechnungen aus:

1.1

a.
$$\begin{array}{rl} 873 & \\ 112 & \\ 1718 & \\ 157 & \\ 3461 & \\ \hline \ldots & + \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rl} 1578 & \\ 9553 & \\ 7218 & \\ 212 & \\ 4139 & \\ \hline \ldots & + \end{array}$$

1.2

a.
$$\begin{array}{rl} 9134 & \\ 4319 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{rl} 4585 & \\ 3287 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{rl} 7033 & \\ 1398 & \\ \hline \ldots & - \end{array}$$

1.3 Berechnen Sie:

a. 34×89
b. 67×46
c. 61×93
d. 55×11
e. 78×38

1.4 Berechnen Sie:

a. 354×83
b. 67×546
c. 461×79
d. 655×102
e. 178×398

Berechnen Sie den Quotienten und den Rest mittels der schriftlichen Division:

1.5

a. $154 : 13$
b. $435 : 27$
c. $631 : 23$
d. $467 : 17$
e. $780 : 37$

1.6

a. $2334 : 53$
b. $6463 : 101$
c. $7682 : 59$
d. $6178 : 451$
e. $5811 : 67$

1.7

a. $15457 : 11$
b. $4534 : 97$
c. $63321 : 23$
d. $56467 : 179$
e. $78620 : 307$

1.8

a. $42334 : 41$
b. $13467 : 101$
c. $35641 : 99$
d. $16155 : 215$
e. $92183 : 83$

J. van de Craats, R. Bosch, *Grundwissen Mathematik*, Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-642-13501-9_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Addition, Subtraktion und Multiplikation

Die Folge $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots$ ist die Folge der *positiven ganzen Zahlen.* Mit dieser Folge lernt jedes Kind zählen. Das Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren dieser Zahlen, ohne die Hilfe von Rechengeräten, lernen wir in der Grundschule. Siehe nebenstehende Beispiele.

$$
\begin{array}{r}
341 \\
295 \\
718 \\
12 \\
1431 \\
\hline
2797
\end{array}\; +
\qquad
\begin{array}{r}
8135 \\
3297 \\
\hline
4838
\end{array}\; -
\qquad
\begin{array}{r}
431 \\
728 \\
\hline
3448 \\
862 \\
3017 \\
\hline
313768
\end{array}\; \times
$$

Division mit Rest

Division ohne Zuhilfenahme eines Rechengerätes wird mit der *schriftlichen Division* getätigt. Betrachten Sie nebenstehende schriftliche Division für $83218 : 37$, dies bedeutet 83218 geteilt durch 37. Den *Quotienten* 2249 finden wir rechts oben und den *Rest* 5 am unteren Ende. Die schriftliche Division lehrt uns, dass

$$83218 = 2249 \times 37 + 5$$

Dies können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$\frac{83218}{37} = 2249 + \frac{5}{37}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird meistens vereinfacht zu $2249\frac{5}{37}$, also erhalten wir die Gleichung

$$\frac{83218}{37} = 2249\frac{5}{37}.$$

$$
\begin{array}{l}
83218 \;:\; 37 = 2249 \\
\underline{74} \qquad\qquad\quad \uparrow \\
\;\;92 \qquad\qquad \text{Quotient} \\
\;\;\underline{74} \\
\;\;181 \\
\;\;\underline{148} \\
\quad\;\, 338 \\
\quad\;\, \underline{333} \\
\qquad\;\; 5 \;\; \leftarrow \text{Rest}
\end{array}
$$

Zerlegen Sie die nachfolgenden Zahlen in Primfaktoren:

1.9
- a. 24
- b. 72
- c. 250
- d. 96
- e. 98

1.10
- a. 288
- b. 1024
- c. 315
- d. 396
- e. 1875

1.11
- a. 972
- b. 676
- c. 2025
- d. 1122
- e. 860

1.12
- a. 255
- b. 441
- c. 722
- d. 432
- e. 985

1.13
- a. 2000
- b. 2001
- c. 2002
- d. 2003
- e. 2004

1.14
- a. Ihr Geburtsjahr
- b. Ihre Postleitzahl
- c. Ihren PinCode

Bestimmen Sie alle Teiler der nachfolgenden Zahlen. Arbeiten Sie exakt und systematisch; wenn Sie nicht sorgfältig arbeiten, geht schnell ein Teiler unter. Es ist sinnvoll zunächst die Primfaktorzerlegung einer solchen Zahl aufzuschreiben.

1.15
- a. 12
- b. 20
- c. 32
- d. 108
- e. 144

1.16
- a. 72
- b. 100
- c. 1001
- d. 561
- e. 196

Teiler und Primzahlen

In einigen Fällen geht die Teilung auf, dies bedeutet der Rest ist Null. So ist z.B. $238 : 17 = 14$. Dann gilt, dass $238 = 14 \times 17$ ist. Die Zahlen 14 und 17 nennt man *Teiler* von 238 und die Schreibweise $238 = 14 \times 17$ nennt man eine *Zerlegung in Faktoren* der Zahl 238. Die Worte „Teiler“ und „Faktoren“ sind in diesem Zusammenhang Synonyme.

Die 14, eine der beiden Teiler, ist ebenfalls zerlegbar und zwar als $14 = 2 \times 7$. Jedoch kann die Zerlegung von 238 nicht weiter fortgesetzt werden, da 2, 7 und 17 jeweils *Primzahlen* sind. Primzahlen sind die Zahlen, die nicht in kleinere Zahlen zerlegbar sind. Damit ist die Primfaktorzerlegung von 238 gefunden: $238 = 2 \times 7 \times 17$.

Da $238 = 1 \times 238$ auch ein Zerlegung von 238 ist, sind 1 und 238 ebenfalls Teiler von 238. Jede Zahl hat 1 und sich selbst als Teiler. Die interessanten, *echten* Teiler einer Zahl sind die Teiler, die größer als 1 und kleiner als die Zahl selbst sind. Die Primzahlen sind die Zahlen, welche größer als 1 sind und keine echten Teiler haben. Die Folge aller Primzahlen beginnt folgendermaßen:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, \ldots$$

Jede ganze Zahl, die größer als 1 ist, kann in Primfaktoren zerlegt werden. In nebenstehenden Beispielen wird gezeigt, wie wir eine derartige *Primfaktorzerlegung* mittels systematischer Suche nach immer größeren Primteilern bestimmen können. Immer dann, wenn wir einen Primfaktor gefunden haben, teilen wir durch diesen und führen das Verfahren mit dem Quotienten fort. Wir sind fertig, wenn wir bei 1 angekommen sind. Auf der rechten Seite stehen die Primfaktoren. Aus den drei Leiterdiagrammen lesen wir die Primfaktorzerlegungen ab:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 585 & 3 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3003 & 3 \\ 1001 & 7 \\ 143 & 11 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} 180 &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 &&= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 585 &= 3 \times 3 \times 5 \times 13 &&= 3^2 \times 5 \times 13 \\ 3003 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass es sinnvoll ist Primfaktoren, welche öfter vorkommen, zusammen in einer Potenz zu schreiben: $2^2 = 2 \times 2$ und $3^2 = 3 \times 3$. Weitere Beispiele (fertigen Sie selbst die Leiterdiagramme):

$$\begin{aligned} 120 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 &&= 2^3 \times 3 \times 5 \\ 81 &= 3 \times 3 \times 3 \times 3 &&= 3^4 \\ 48 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 &&= 2^4 \times 3 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler (ggT) von:

1.17
- a. 12 und 30
- b. 24 und 84
- c. 27 und 45
- d. 32 und 56
- e. 34 und 85

1.18
- a. 45 und 225
- b. 144 und 216
- c. 90 und 196
- d. 243 und 135
- e. 288 und 168

1.19
- a. 1024 und 864
- b. 1122 und 1815
- c. 875 und 1125
- d. 1960 und 6370
- e. 1024 und 1152

1.20
- a. 1243 und 1244
- b. 1721 und 1726
- c. 875 und 900
- d. 1960 und 5880
- e. 1024 und 2024

Bestimmen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von:

1.21
- a. 12 und 30
- b. 27 und 45
- c. 18 und 63
- d. 16 und 40
- e. 33 und 121

1.22
- a. 52 und 39
- b. 64 und 80
- c. 144 und 240
- d. 169 und 130
- e. 68 und 51

1.23
- a. 250 und 125
- b. 144 und 216
- c. 520 und 390
- d. 888 und 185
- e. 124 und 341

1.24
- a. 240 und 180
- b. 276 und 414
- c. 588 und 504
- d. 315 und 189
- e. 403 und 221

Bestimmen Sie den ggT und das kgV von:

1.25
- a. 9, 12 und 30
- b. 24, 30 und 36
- c. 10, 15 und 35
- d. 18, 27 und 63
- e. 21, 24 und 27

1.26
- a. 28, 35 und 49
- b. 64, 80 und 112
- c. 39, 52 und 130
- d. 144, 168 und 252
- e. 189, 252 und 315

Der ggT und das kgV

Zwei Zahlen können gemeinsame Teiler haben. Der *größte gemeinsame Teiler* (ggT) ist, so wie es der Name sagt, ihr größter gemeinschaftlicher Teiler. Falls die Primfaktorzerlegung beider Zahlen bekannt ist, kann der ggT hieraus direkt abgelesen werden. So haben wir auf Seite 9 die folgenden Primfaktorzerlegungen gefunden:

$$\begin{aligned} 180 &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \\ 585 &= 3^2 \times 5 \times 13 \\ 3003 &= 3 \times 7 \times 11 \times 13 \end{aligned}$$

Hieraus sehen wir, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(180, 585) &= \mathrm{ggT}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3^2 \times 5 \times 13) = 3^2 \times 5 = 45 \\ \mathrm{ggT}(180, 3003) &= \mathrm{ggT}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \\ \mathrm{ggT}(585, 3003) &= \mathrm{ggT}(3^2 \times 5 \times 13\,,\, 3 \times 7 \times 11 \times 13) = 3 \times 13 = 39 \end{aligned}$$

Das *kleinste gemeinsame Vielfache* (kgV) zweier Zahlen ist die kleinste Zahl, welche sowohl ein Vielfaches der einen Zahl, als auch ein Vielfaches der anderen Zahl ist. Mit anderen Worten, sie ist die kleinste Zahl, die durch die beiden anderen Zahlen teilbar ist. Auch das kgV kann aus den Primfaktorzerlegungen abgelesen werden. So ist

$$\mathrm{kgV}(180, 585) = \mathrm{kgV}(2^2 \times 3^2 \times 5\,,\, 3^2 \times 5 \times 13) = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 13 = 2340.$$

Eine nützliche Eigenschaft des ggT's und kgV's zweier Zahlen ist, dass ihr Produkt gleich dem Produkt der beiden Zahlen ist. So ist

$$\mathrm{ggT}(180, 585) \times \mathrm{kgV}(180, 585) = 45 \times 2340 = 105300 = 180 \times 585.$$

Auch bei mehr als zwei Zahlen können wir den ggT und das kgV direkt aus ihren Primfaktorzerlegungen ablesen. So ist

$$\begin{aligned} \mathrm{ggT}(180, 585, 3003) &= 3 \\ \mathrm{kgV}(180, 585, 3003) &= 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \;=\; 180180. \end{aligned}$$

Eine schlaue Idee
Es existiert eine Methode, um den ggT zweier Zahlen zu bestimmen, welche oft viel schneller ist, und wobei wir die Primfaktorzerlegungen nicht bestimmen müssen. Die Grundidee ist, dass der ggT von zwei Zahlen ebenfalls ein Teiler der *Differenz* dieser beiden Zahlen sein muss. Erkennen Sie, warum dies so ist?
So muss der ggT(4352,4342) auch ein Teiler von $4352 - 4342 = 10$ sein. Die Zahl 10 hat jedoch nur die Primteiler 2 und 5. Es ist deutlich, dass 5 kein Teiler der beiden Zahlen ist, die 2 jedoch schon und somit gilt, dass der $\mathrm{ggT}(4352, 4342) = 2$ ist. Wer schlau ist, kann durch die Anwendung dieser Idee viel Rechenarbeit sparen!

http://www.springer.com/978-3-642-13500-2

Grundwissen Mathematik
Ein Vorkurs für Fachhochschule und Universität
van de Craats, J.; Bosch, R.
2010, X, 326 S. 200 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-13500-2