Einführung

Dieses Buch ist eine Einführung in die Theorie der automorphen Formen. Beginnend mit klassischen Modulformen, führt es bis zur Darstellungstheorie der adelischen GL(2) und den zugehörigen L-Funktionen. Die klassischen Modulformen sind hierbei ein roter Faden, der an allen Stellen als Beispiel für die entwickelte Theorie dient. Wir führen sie als holomorphe Funktionen auf der oberen Halbebene mit einem Invarianzverhalten unter ganzzahligen Transformationen ein. Indem wir Funktionen auf der Halbebene als Funktionen der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auffassen, ermöglichen wir den Einsatz darstellungstheoretischer Methoden in der Theorie der automorphen Formen. Schließlich werden die Grundringe auf Adele-Ringe erweitert, was dazu führt, dass zahlentheoretische Fragestellungen sozusagen in die Struktur eingebaut werden und mit analytischen Methoden behandelt werden können. Die Vorkenntnisse, die der Leser mitbringen sollte, umfassen etwas Algebra und komplexe Analysis im Umfang einer jeweils einsemestrigen Einführungsvorlesung. Es sollte zum Beispiel bekannt sein, was eine Gruppenoperation ist oder ein Ring, ferner sollte der Leser im Stande sein, den Residuensatz anzuwenden. Darüber hinaus sind Kenntnisse der Lebesgueschen Maß- und Integrationstheorie von Vorteil. Man braucht aus dieser Theorie einerseits die Grundbegriffe wie σ-Algebren und Maße und andererseits einige Sätze wie die Konvergenzsätze der majorisierten und monotonen Konvergenz oder die Vollständigkeit der L^p-Räume. Diese Dinge sind in einem kleinen Appendix zur Maß- und Integrationstheorie zusammengefasst. Dieses Buch setzt den Schwerpunkt auf das Verhältnis von automorphen Formen zu L-Funktionen. Um die Zugänglichkeit zu erhöhen, wird versucht, die zentralen Resultate dieses Gebiets mit minimalem Theorieaufwand zu erreichen. Notwendigerweise muss dann auf die größtmögliche Allgemeinheit der Darstellung verzichtet werden, für den interessierten Leser werden weiterführende Literaturhinweise gegeben.

Im ersten Kapitel wird der klassische Zugang zu Modulformen über doppeltperiodische Funktionen gewählt. Durch Betrachtung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion gelangt man rasch zu den Eisenstein-Reihen und damit zur Theorie der Modulformen. Diese Theorie wird, für die klassische Modulgruppe, im zweiten Kapitel betrachtet, wo auch die L-Funktionen eingeführt werden. Nach Dieudonné hat die Theorie der automorphen Formen zwei Revolutionen erlebt: die *Intervention der Lie-Gruppen* und die *Intervention der Adele*. Die Lie-Gruppen intervenieren im dritten Kapitel, die Adele im Rest des Buches, wobei wir versuchen, die Kontinuität der Darstellung zu bewahren, indem wir immer wieder auf die ersten Beispiele, die klassischen Spitzenformen, zurückkommen. Die Kapitel vier und fünf bereiten den Boden für die Doktorarbeit von John Tate, die im sechsten Kapitel dargestellt wird, allerdings in einer vereinfachten Form, da wir nur über den rationalen Zahlen arbeiten und nicht über einem beliebigen Zahlkörper. Für unsere Zwecke ist das eher förderlich, da wir die zentralen Ideen so besser herausarbeiten können. Im siebenten Kapitel werden automorphe Formen auf der Gruppe der invertierbaren zwei mal zwei Matrizen mit adelischen Einträgen untersucht und im achten Kapitel übertragen wir die Ideen von Tates Doktorarbeit auf den Fall von zwei mal zwei Matrizen und erhalten hierdurch die analytische Fortsetzung der L-Funktionen. Für die klassischen Spitzenformen rechnen wir am Ende nach, dass die neue, allgemeinere Methode in diesem Spezialfall dasselbe Ergebnis liefert wie die Methode aus dem zweiten Kapitel. Ich bedanke mich für das Korrekturlesen dieses Buches und viele nützliche Hinweise bei Ralf Beckmann, Judith Ludwig, Frank Monheim und Martin Raum.

Tübingen, Mai 2010 Anton Deitmar

Notation

Wir schreiben $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen und $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen mit Null, sowie $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ für die Mengen der ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen.

Ist A eine Teilmenge einer Menge X, so bezeichnen wir mit $\mathbf{1}_A : X \to \mathbb{C}$ die *Indikatorfunktion* von A, d. h., es ist

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A\,, \\ 0 & \text{falls } x \notin A\,. \end{cases}$$

Ein *Ring* ist stets kommutativ mit Eins. Ist R ein Ring, so bezeichnen wir mit $R^\times$ die Gruppe der Einheiten von R, d. h., die multiplikative Gruppe der invertierbaren Elemente von R.

Springer

http://www.springer.com/978-3-642-12389-4

Automorphe Formen
Deitmar, A.
2010, VIII, 252 S. 4 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-12389-4