Kapitel 1
Doppelt-periodische Funktionen

Wir beginnen mit meromorphen Funktionen der komplexen Ebene, die periodisch in zwei Richtungen sind. Diese lassen sich durch eine Summenkonstruktion gewinnen. Die Abhängigkeit dieser Summenkonstruktion von dem Gitter führt uns dann direkt zum Begriff der Modulformen.

1.1 Definition und erste Eigenschaften

Wir erinnern als erstes an den Begriff einer meromorphen Funktion. Sei D eine offene Teilmenge der komplexen Ebene $\mathbb{C}$. Eine *meromorphe Funktion* f auf D ist eine holomorphe Funktion $f : D \smallsetminus P \to \mathbb{C}$, wobei $P \subset D$ eine abzählbare Teilmenge ist und die Funktion f in den Punkten von P Pole hat.

Hierbei kann die Polstellenmenge P auch leer sein, also ist jede holomorphe Funktion auch meromorph. Da ein Häufungspunkt von Polen stets eine wesentliche Singularität ist, wir wesentliche Singularitäten aber ausgeschlossen haben, folgt, dass P in D keinen Häufungspunkt hat, die Pole können sich also höchstens am Rand häufen.

Sei $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Riemannsche Zahlenkugel und sei f meromorph auf D mit Polstellenmenge P. Wir erweitern f zu einer Abbildung $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$, indem wir $f(p) = \infty$ setzen, falls $p \in P$ ist. Meromorphe Funktionen werden also auch als überall definierte, $\widehat{\mathbb{C}}$-wertige Abbildungen aufgefasst.

Ist $p \in D$ ein Punkt und f meromorph auf D, so existiert genau eine ganze Zahl $r \in \mathbb{Z}$ so dass $f(z) = h(z)(z-p)^r$ gilt, wobei h eine Funktion ist, die in $z = p$ holomorph ist und in p nicht verschwindet. Diese Zahl r nennt man die *Ordnung* von f in p, geschrieben

$$r = \operatorname{ord}_{z=p} f(z) = \operatorname{ord}_p f .$$

Merke: Die Ordnung von f in p ist positiv, wenn p eine Nullstelle ist und negativ, falls in p ein Pol vorliegt.

A. Deitmar, *Automorphe Formen*
DOI 10.1007/978-3-642-12390-0, © Springer 2010

Definition 1.1.1 Ein *Gitter* in $\mathbb{C}$ ist eine Untergruppe Λ der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ der Form

$$\Lambda \;=\; \Lambda(a,b) \;=\; \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \;=\; \{ka + lb : k, l \in \mathbb{Z}\},$$

wobei $a, b \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$ sind. In diesem Fall sagt man, dass das Gitter von a und b erzeugt wird, oder dass a, b eine $\mathbb{Z}$-*Basis* des Gitters ist.

Ein Gitter hat viele Untergitter, zum Beispiel ist $\Lambda(na, mb)$ ein Untergitter von $\Lambda(a, b)$, falls $n, m \in \mathbb{N}$. Eine Untergruppe $\Sigma \subset \Lambda$ ist genau dann ein Untergitter, falls die Quotientengruppe Λ/Σ endlich ist (siehe Aufgabe 1.2). Es gilt zum Beispiel:

$$\Lambda(a,b)/\Lambda(ma,nb) \;\cong\; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Definition 1.1.2 Sei Λ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ heißt *doppelt-periodisch* zum Gitter Λ oder Λ*-periodisch*, falls

$$f(z+\lambda) \;=\; f(z)$$

für jedes $z \in \mathbb{C}$ und jedes $\lambda \in \Lambda$ gilt. Ist f doppelt-periodisch zum Gitter Λ, so auch zu jedem Untergitter. Zur Erklärung dieser Sprechweise verweisen wir auf Aufgabe 1.1.

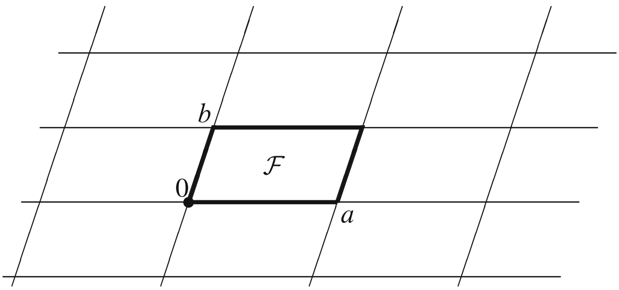
Proposition 1.1.3 *Eine holomorphe doppelt-periodische Funktion ist konstant.*

Beweis: Sei f holomorph und doppelt-periodisch. Dann gibt es ein Gitter $\Lambda = \Lambda(a, b)$ mit $f(z + \lambda) = f(z)$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Sei

$$\mathcal{F} \;=\; \mathcal{F}(a,b) \;=\; \{ta + sb : 0 \le s, t < 1\}.$$

Dann ist $\mathcal{F}$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$, also ist ihr Abschluss $\overline{\mathcal{F}}$ kompakt. Die Menge $\mathcal{F}$ heißt *Fundamentalmasche* des Gitters Λ.

Wir sagen: zwei Punkte $z, w \in \mathbb{C}$ sind *konjugiert modulo* Λ, wenn $z - w \in \Lambda$.



Lemma 1.1.4 *Sei $\mathcal{F}$ eine Fundamentalmasche des Gitters $\Lambda \subset \mathbb{C}$. Dann ist $\mathbb{C} = \mathcal{F} + \Lambda$, genauer gilt: zu jedem $z \in \mathbb{C}$ existiert genau ein $\lambda \in \Lambda$ so dass $z + \lambda \in \mathcal{F}$. Wir können auch sagen: jeder Punkt von $\mathbb{C}$ ist modulo Λ konjugiert zu genau einem Punkt von $\mathcal{F}$.*

Beweis: Sei a, b die $\mathbb{Z}$-Basis von Λ, zu der $\mathcal{F}$ assoziiert ist, also $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, b)$. Da a und b über $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind, bilden sie eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$, für ein gegebenes $z \in \mathbb{C}$ gibt es also $r, v \in \mathbb{R}$ mit $z = ra + vb$. Man kann dann eindeutig bestimmte $m, n \in \mathbb{Z}$ finden und $t, s \in [0, 1)$ so dass

$$r = m + t \quad \text{und} \quad v = n + s\,.$$

Dann folgt

$$z = ra + vb = \underbrace{ma + nb}_{\in\Lambda} + \underbrace{ta + sb}_{\in\mathcal{F}}$$

und diese Darstellung ist eindeutig. □

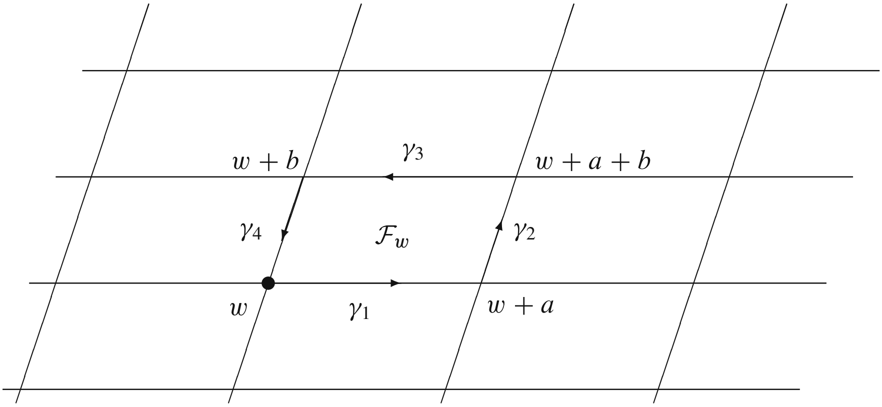
Wir beweisen nun die Proposition. Da die Funktion f holomorph ist, ist sie insbesondere stetig, also ist $f\left(\overline{\mathcal{F}}\right)$ kompakt, also beschränkt. Für ein beliebiges $z \in \mathbb{C}$ gibt es nach dem Lemma ein $\lambda \in \Lambda$ mit $z + \lambda \in \mathcal{F}$, also gilt $f(z) = f(z + \lambda) \in f(\mathcal{F})$, damit ist die Funktion f überhaupt beschränkt, nach dem Satz von Liouville also konstant. □

Proposition 1.1.5 *Sei $\mathcal{F}$ eine Fundamentalmasche eines Gitters Λ und sei f eine Λ-periodische meromorphe Funktion. Dann existiert $w \in \mathbb{C}$ so dass f keinen Pol auf dem Rand der verschobenen Fundamentalmasche $\mathcal{F}_w = \mathcal{F} + w$ hat. Für jedes solche w gilt dann*

$$\int_{\partial\mathcal{F}_w} f(z)\,\mathrm{d}z = 0\,,$$

wobei $\partial\mathcal{F}_w$ der positiv orientierte Rand von $\mathcal{F}_w$ ist.

Beweis: Hat f Pole auf dem Rand von $\mathcal{F}_w$ für jedes w, dann muss f überabzählbar viele Pole haben, was der Meromorphie von f widerspricht. Sei also w so gewählt, dass keine Pole von f auf dem Rand von $\mathcal{F}_w$ liegen.



Der Integrationsweg $\partial\mathcal{F}_w$ zerlegt sich in die Wege $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ wie im Bild. Nun ist γ_3 derselbe Weg wie γ_1, nur um $b \in \Lambda$ verschoben und in der umgekehrten

Richtung laufend. Die Funktion f ändert sich nicht, wenn man das Argument um b verschiebt und die Umkehrung der Integrationsrichtung hat einen Zeichenwechsel zur Folge. Zusammen ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0 \quad \text{und analog} \quad \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0\,,$$

also insgesamt $\int_{\partial \mathcal{F}_w} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; 0$ wie behauptet. $\square$

Proposition 1.1.6 *Sei f periodisch zum Gitter Λ und $\mathcal{F}$ eine Fundamentalmasche von Λ. Für jedes $w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\sum_{z \in \mathcal{F}_w} \mathrm{res}_z(f) \;=\; 0\,.$$

Beweis: Ist kein Pol auf dem Rand von $\mathcal{F}_w$, so folgt die Aussage aus dem Residuensatz. Allgemein folgt sie, weil die Summe gar nicht von w abhängt, denn die Residuen Λ-konjugierter Punkte sind gleich und damit folgt

$$\sum_{z \in \mathcal{F}_w} \mathrm{res}_z(f) \;=\; \sum_{z \,\in\, \mathbb{C} \bmod \Lambda} \mathrm{res}_z(f)\,.$$

$\square$

Proposition 1.1.7 *Sei $\mathcal{F}$ eine Fundamentalmasche zu dem Gitter Λ und f sei eine Λ-periodische meromorphe Funktion. Dann ist für jedes $w \in \mathbb{C}$ die Anzahl der Nullstellen von f in $\mathcal{F}_w$ gleich der Anzahl der Polstellen von f in $\mathcal{F}_w$. Beide werden hierbei mit Vielfachheiten gezählt.*

Beweis: Eine komplexe Zahl z_0 ist genau dann eine Null- oder Polstelle von f der Ordnung $k \in \mathbb{Z}$, wenn die Funktion $\frac{f'}{f}$ einen einfachen Pol in z_0 vom Residuum k hat. Damit folgt die Proposition aus der letzten Proposition, da auch die Funktion $\frac{f'}{f}$ doppelt-periodisch zum Gitter Λ ist. $\square$

1.2 Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion

Bislang haben wir noch keine doppelt-periodische Funktion gesehen, wenn man von den konstanten Funktionen einmal absieht. In diesem Abschnitt werden wir doppelt-periodische meromorphe Funktionen konstruieren, indem wir Mittag-Leffler-Reihen betrachten, die ihre Pole in den Gitterpunkten haben.

Zunächst brauchen wir ein Konvergenzkriterium. Dies beweisen wir in einer schärferen Form als wir jetzt im Moment brauchen, was sich später als nützlich erweisen wird. Sei $b \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ fest gewählt. Für jedes $a \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}b$ ist $\Lambda_a = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b$ ein Gitter.

Lemma 1.2.1 *Sei $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter und sei $s \in \mathbb{C}$. Die Reihe*

$$\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{|\lambda|^s}$$

konvergiert absolut, wenn $\mathrm{Re}(s) > 2$. *Wir verschärfen diese Aussage wie folgt. Wir fixieren $b \in \mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$ und betrachten die Gitter Λ_a wie oben. Die Summe $\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_a\\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{|\lambda|^s}$ konvergiert gleichmäßig für $(a,s) \in C \times \{\mathrm{Re}(s) \geq \alpha\}$, wobei C eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}b$ und $\alpha > 2$ ist.*

Beweis: Sein α und C wie im Lemma gegeben. Wir können uns auf den Fall $\mathrm{Re}(s) > 0$ einschränken, da sonst das absolute Glied der Reihe nicht einmal gegen Null geht. Außerdem reicht es, den Fall $s \in \mathbb{R}$ zu betrachten, da für $s \in \mathbb{C}$ gilt $|(|\lambda|^{-s})| = |\lambda|^{-\mathrm{Re}(s)}$. Dann ist die Funktion $x \mapsto x^s$ für $x > 0$ monoton wachsend. Sei $\mathcal{F}(a)$ eine Fundamentalmasche von Λ_a und sei

$$\psi_{a,s}(z) \;=\; \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_a\\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{|\lambda|^s}\mathbf{1}_{\mathcal{F}(a)+\lambda}(z)\,.$$

Nach Konstruktion gilt

$$|\mathcal{F}(a)| \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda_a\\ \lambda\neq 0}} \frac{1}{|\lambda|^s} \;=\; \int_{\mathbb{C}} \psi_{a,s}(x+iy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

wobei $|\mathcal{F}(a)|$ der Flächeninhalt von $\mathcal{F}(a)$ ist. Die stetige Abbildung $a \mapsto |\mathcal{F}(a)|$ nimmt auf dem Kompaktum C Maximum und Minimum an. Es gilt $\psi_{a,s} \leq \psi_{a,\alpha}$ falls $s \geq \alpha$, es reicht also, die (in a) gleichmäßige Konvergenz von $\int_{\mathbb{C}} \psi_{a,\alpha}(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ zu zeigen.

Sei $r > 0$ so groß, dass für jedes $a \in C$ der *Durchmesser* der Fundamentalmasche $\mathcal{F}(a)$,

$$\mathrm{diam}(\mathcal{F}(a)) \;=\; \sup\{|z-w| : z,w \in \mathcal{F}(a)\}$$

kleiner als r ist. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist $\psi_{a,\alpha}(z) = \frac{1}{|\lambda_{a,z}|^s}$ für ein $\lambda_{a,z} \in \Lambda_a$ mit $|z-\lambda_{a,z}| < r$. Es gilt dann für jedes $a \in C$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$,

$$|\lambda_{a,z}| \;=\; |\lambda_{a,z}-z+z| \;\leq\; |\lambda_{a,z}-z|+|z| \;<\; r+|z| \;\leq\; 2|z|\,.$$

Auf der anderen Seite gilt für $|z| \geq 2r$,

$$|\lambda_{a,z}| \;=\; |\lambda_{a,z}-z-(-z)| \;\geq\; ||\lambda_{a,z}-z|-|z|| \;\geq\; \tfrac{1}{2}|z|\,.$$

Setze $R = 2r$, dann gilt für $|z| \geq R$, dass $\frac{1}{2^s}|z|^{-s} \;\leq\; \psi_a(z) \;\leq\; 2^s|z|^{-s}$ für jedes $a \in C$. Die stetige Abbildung $a \mapsto \int_{|z|\leq R} \psi_a(z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ist auf der kompakten Menge C beschränkt. Es folgt, dass die Reihe gleichmäßig für $a \in C$ konvergiert, wenn $\int_{|z|>R} \frac{1}{|z|^\alpha}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty$ gilt. Wir benutzen nun die *Polarkoordinaten Transformation* auf $\mathbb{C}$. Hierzu erinnern wir uns, dass die Abbildung $P : (0,\infty) \times (-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, gegeben durch

$$P(r,\theta) = r\mathrm{e}^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

eine Bijektion auf das Bild $\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ ist. Die Funktionaldeterminante dieser Transformation ist r, also ergibt die Transformationsformel:

$$\int_{\mathbb{C}^\times} f(x+iy)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^\infty f(r\mathrm{e}^{i\theta}) r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$$

für jede integrierbare Funktion f. Hieraus folgt

$$\int_{|z|>R} \frac{1}{|z|^\alpha}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 2\pi \int_R^\infty r^{1-\alpha}\, \mathrm{d}r\,,$$

was die Behauptung liefert. □

In dem folgenden Satz definieren wir die Weierstraßsche $\wp$-Funktion.

Satz 1.2.2 *Sei Λ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Die Reihe*

$$\wp(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \smallsetminus \{0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

konvergiert lokal gleichmäßig absolut in $\mathbb{C} \smallsetminus \Lambda$. Sie definiert eine meromorphe, Λ-periodische Funktion, die Weierstraßsche $\wp$-Funktion.

Beweis: Für $|z| < \frac{1}{2}|\lambda|$ gilt $|\lambda - z| \geq \frac{1}{2}|\lambda|$. Ferner gilt $|2\lambda - z| \leq \frac{5}{2}|\lambda|$. Also ist

$$\left|\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right| = \left|\frac{\lambda^2 - (z-\lambda)^2}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| = \left|\frac{z(2\lambda - z)}{\lambda^2(z-\lambda)^2}\right| \leq \frac{|z|\frac{5}{2}|\lambda|}{|\lambda|^2\frac{1}{4}|\lambda|^2} = \frac{10|z|}{|\lambda|^3}\,,$$

so dass mit Lemma 1.2.1 die lokal-gleichmäßige Konvergenz folgt.

Die Periodizität ist nicht sofort klar. Wir zeigen zunächst, dass $\wp$ eine gerade Funktion ist:

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \smallsetminus \{0\}} \frac{1}{(z+\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda \in \Lambda \smallsetminus \{0\}} \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \wp(z)$$

durch ersetzen von λ durch $-\lambda$. Da die Reihe lokal gleichmäßig konvergiert, dürfen wir gliedweise differenzieren. Die Ableitung,

$$\wp'(z) \;=\; -2\sum_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{(z-\lambda)^3}$$

ist offensichtlich Λ-periodisch. Daher ist für $\lambda\in\Lambda$ die Funktion $\wp(z+\lambda)-\wp(z)$ konstant. Für $z=-\frac{\lambda}{2}$ bestimmen wir diese Konstante zu $\wp\left(\frac{\lambda}{2}\right)-\wp\left(-\frac{\lambda}{2}\right) \;=\; 0$, da $\wp$ gerade ist. □

Satz 1.2.3 (Laurent-Entwicklung von $\wp$) *Sei* $r \;=\; \min\{|\lambda| : \lambda\in\Lambda\smallsetminus\{0\}\}$. *Für* $0<|z|<r$ *gilt*

$$\wp(z) \;=\; \frac{1}{z^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2}z^{2n}\,,$$

wobei $G_k \;=\; G_k(\Lambda) \;=\; \sum_{\lambda\in\Lambda\smallsetminus\{0\}}\frac{1}{\lambda^k}$ *für* $k\geq 4$.

Beweis: Für $0<|z|<r$ und $\lambda\in\Lambda\smallsetminus\{0\}$ gilt $|z/\lambda|<1$, also

$$\frac{1}{(z-\lambda)^2} \;=\; \frac{1}{\lambda^2\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)^2} \;=\; \frac{1}{\lambda^2}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\left(\frac{z}{\lambda}\right)^k\right),$$

und damit

$$\frac{1}{(z-\lambda)^2}-\frac{1}{\lambda^2} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{\lambda^{k+2}}z^k.$$

Wir summieren über alle λ und finden

$$\wp(z) \;=\; \frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\sum_{\lambda\neq 0}\frac{1}{\lambda^{k+2}}z^k \;=\; \frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)G_{k+2}z^k,$$

wobei wir die Summationsreihenfolge vertauscht haben, was wegen absoluter Konvergenz der Doppelsumme erlaubt ist. Diese absolute Konvergenz wiederum folgt aus

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{|\lambda|^{k+2}}|z|^k \leq \frac{1}{|\lambda|^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{|\lambda|^{k-1}}|z|^k$$

und Lemma 1.2.1. Da $\wp$ gerade ist, verschwinden die G_{k+2} für ungerades k. □

1.3 Die Differentialgleichung der $\wp$-Funktion

Wir zeigen die Differentialgleichung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion, deren Koeffizienten, die Eisenstein-Reihen, die ersten Beispiele von Modulformen sind. Außerdem liefert diese Differentialgleichung einen Zusammenhang zwischen doppelt periodischen Funktionen und elliptischen Kurven, siehe hierzu die Anmerkungen am Ende des Kapitels.

Satz 1.3.1 *Die $\wp$-Funktion erfüllt die Differentialgleichung*

$$\left(\wp'(z)\right)^2 \;=\; 4\wp^3(z) - 60G_4\wp(z) - 140G_6\,.$$

Beweis: Wir zeigen, dass die Differenz beider Seiten keinen Pol bei Null mehr hat, also eine holomorphe Λ-periodische Funktion ist, somit konstant.

In einer Umgebung der Null gilt

$$\wp'(z) \;=\; -\frac{2}{z^3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots\,,$$

also

$$\left(\wp'(z)\right)^2 \;=\; \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots\,.$$

Andererseits

$$4\wp^3(z) \;=\; \frac{4}{z^6} + \frac{36G_4}{z^2} + 60G_6 + \dots\,,$$

so dass

$$\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\wp^3(z) \;=\; -\frac{60G_4}{z^2} - 140G_6 + \dots\,.$$

Wir erhalten schließlich

$$\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\wp^3(z) + 60G_4\wp(z) = -140G_6 + \dots$$

wobei die linke Seite eine holomorphe Λ-periodische Funktion ist, also konstant. Auswertung der rechten Seite in $z = 0$ zeigt, dass diese Konstante gleich $-140G_6$ ist. □

1.4 Eisenstein-Reihen

Für einen beliebigen Ring R sei $\mathrm{M}_2(R)$ die Menge aller 2×2 Matrizen mit Einträgen aus R. In der Linearen Algebra beweist man, dass eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}_2(R)$ genau dann invertierbar ist, wenn ihre Determinante in R invertierbar ist, wenn also gilt $ad - bd \in R^\times$. Das wird zwar in der Regel nur für Körper formuliert, geht für einen beliebigen Ring aber genauso. Sei dann $\mathrm{GL}_2(R)$ die Gruppe aller invertierbaren Matrizen in $\mathrm{M}_2(R)$. Diese enthält die Untergruppe $\mathrm{SL}_2(R)$ aller Matrizen mit

Determinante 1. Betrachten wir das Beispiel $R = \mathbb{Z}$. Es ist $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$. Daher ist $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ die Gruppe aller Matrizen mit Determinante ± 1. Die Untergruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist daher eine Untergruppe vom Index 2.

Für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$ konvergiert die Reihe $G_k(\Lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda \smallsetminus \{0\}} \lambda^{-k}$. Ist nun $w \in \mathbb{C}^\times$, dann ist $w\Lambda$ ebenfalls ein Gitter und es gilt

$$G_k(w\Lambda) = w^{-k} G_k(\Lambda).$$

Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, dann ist

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta$$

ein Gitter in $\mathbb{C}$. Ist $z \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(z) > 0$, dann sind 1 und z linear unabhängig über $\mathbb{R}$. Wir definieren die Eisenstein-Reihen als Funktionen auf der *oberen Halbebene*

$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

durch

$$G_k(z) = G_k(\Lambda(z, 1)) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(mz + n)^k},$$

wobei die Summe über alle $m, n \in \mathbb{Z}$ erstreckt wird, die nicht beide Null sind. In Matrizenschreibweise ist $mz + n = (\, z \;\; 1\,) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$. Die Gruppe $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ operiert auf allen Paaren $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ durch Multiplikation von links. Sei also $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, so gilt insbesondere

$$\begin{aligned}
G_k(z) &= \sum_{m,n} \left((\, z \;\; 1\,) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \right)^{-k} &&= \sum_{m,n} \left((\, z \;\; 1\,)\, \gamma^t \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \right)^{-k} \\
&= \sum_{m,n} \left((\, z \;\; 1\,) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \right)^{-k} &&= \sum_{m,n} \left((az + b, cz + b) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \right)^{-k} \\
&= (cz + d)^{-k} \sum_{m,n} \left(\left(\frac{az + b}{cz + d}, 1 \right) \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \right)^{-k} &&= (cz + d)^{-k} G_k \left(\frac{az + b}{cz + d} \right),
\end{aligned}$$

oder

$$G_k \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = (cz + d)^k G_k(z).$$

Proposition 1.4.1 *Ist* $k \geq 4$ *gerade, so gilt* $\lim_{y \to \infty} G_k(iy) = 2\zeta(k)$, *wobei*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \mathrm{Re}(s) > 1,$$

die Riemannsche Zetafunktion ist. (Siehe Aufgabe 1.3.)

Beweis: Es gilt

$$G_k(iy) \;=\; 2\zeta(k) + \sum_{\substack{(m,n)\\ m\neq 0}} \frac{1}{(miy+n)^k}\,.$$

Wir behaupten, dass der zweite Summand für $y \to \infty$ gegen Null geht. Dafür schätzen wir ab

$$\left|\sum_{\substack{(m,n)\\ m\neq 0}} \frac{1}{(miy+n)^k}\right| \;\le\; \sum_{\substack{(m,n)\\ m\neq 0}} \frac{1}{n^k + m^k y^k}\,.$$

Jeder einzelne Summand auf der rechten Seite geht monoton fallend gegen Null, wenn $y \to \infty$. Daher geht die gesamte Summe gegen Null nach dem Satz der Monotonen Konvergenz. □

1.5 Bernoulli-Zahlen und Zetawerte

Wir haben gesehen, dass die Eisenstein-Reihen bei Unendlich Zetawerte annehmen. Später werden wir die genauen Werte dieser Zahlen benötigen, weshalb wir sie hier berechnen. In dem folgenden Lemma definieren wir die Bernoulli-Zahlen B_k.

Lemma 1.5.1 *Für $k = 1, 2, 3, \ldots$ gibt es eindeutig bestimmte rationale Zahlen B_k so dass für $|z| < 2\pi$ gilt*

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} \;=\; \frac{z}{2}\,\frac{e^z+1}{e^z-1} \;=\; 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k B_k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,.$$

Die ersten Werte sind $B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66}$.

Beweis: Sei $f(z) = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}$. Dann ist f holomorph in $\{|z| < 2\pi\}$, also konvergiert auch die Potenzreihenentwicklung von f in diesem Kreis. Wir zeigen, dass f gerade ist:

$$f(-z) = -\frac{z}{2}\,\frac{e^{-z}+1}{e^{-z}-1} = -\frac{z}{2}\,\frac{1+e^z}{1-e^z} = f(z)\,.$$

Daher gibt es die Entwicklung mit Zahlen $B_k \in \mathbb{C}$.

Sei dann $g(z) = \frac{z}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Wir haben zu zeigen, dass die c_k rational sind. Die Gleichung $z = g(z)(e^z - 1)$ liefert

$$z \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{c_j}{(n-j)!} \right).$$

Man erhält $c_0 = 1$ und für jedes $n \geq 2$ ist c_{n-1} eine rationale Linearkombination der c_j mit $j < n-1$. Induktiv folgt also $c_j \in \mathbb{Q}$. $\square$

Proposition 1.5.2 *Für jede ganze Zahl $k \geq 1$ gilt*

$$\zeta(2k) \;=\; \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} B_k \pi^{2k} \,.$$

Die ersten Werte sind $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$, $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.

Beweis: Nach Definition des Kotangens gilt

$$z \cot z \;=\; z i \,\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \,.$$

Indem wir z durch $z/2i$ ersetzen wird daraus

$$\frac{z}{2i} \cot\left(\frac{iz}{2}\right) \;=\; \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = f(z) \,.$$

Hieraus ergibt sich

$$z \cot z \;=\; 1 - \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{2^{2k} z^{2k}}{(2k)!} \,.$$

Die Partialbruchzerlegung des Kotangens (siehe Aufgabe 1.6) lautet

$$\pi \cot(\pi z) \;=\; \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m} \right).$$

Es folgt

$$z \cot z \;=\; 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^2}{z^2 - n^2 \pi^2} \;=\; 1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k} \pi^{2k}} \,,$$

so dass wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{2^{2k} z^{2k}}{(2k)!} \;=\; 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{n^{2k} \pi^{2k}} \,.$$

Die Behauptung folgt durch Koeffizientenvergleich. $\square$

1.6 Aufgaben und Anmerkungen

Aufgabe 1.1 Sei $a \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$. Eine Funktion f auf $\mathbb{C}$ heißt *einfach periodisch* zur Periode a, oder a-periodisch, falls $f(z + a) = f(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeige:

Sind $a, b \in \mathbb{C}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$, so ist eine Funktion f genau dann $\Lambda(a, b)$-periodisch, wenn sie a-periodisch und b-periodisch ist. Diese Tatsache erklärt den Terminus *doppelt-periodisch*.

Aufgabe 1.2 Eine Untergruppe $\Lambda \subset \mathbb{C}$ der additiven Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ heißt *diskrete Untergruppe*, falls Λ in der Teilraumtopologie diskret ist, d. h., wenn es für jedes $\lambda \in \Lambda$ eine offene Menge $U_\lambda \subset \mathbb{C}$ gibt, so dass $\Lambda \cap U_\lambda = \{\lambda\}$ ist. Zeige

(a) Eine Untergruppe $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ist genau dann diskret, wenn es eine offene Menge $U_0 \subset \mathbb{C}$ gibt mit $U_0 \cap \mathbb{C} = \{0\}$.
(b) Ist $\Lambda \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Untergruppe, so gibt es drei Möglichkeiten: entweder ist $\Lambda = \{0\}$, oder es gibt ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $\Lambda = \mathbb{Z}\lambda_0$, oder Λ ist ein Gitter.
(c) Eine diskrete Untergruppe $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ist genau dann ein Gitter, wenn die Quotientengruppe $\mathbb{C}/\Lambda$ in der Quotiententopologie kompakt ist.
(d) Ist $\Lambda \subset \mathbb{C}$ ein Gitter, so ist eine Untergruppe $\Sigma \subset \Lambda$ genau dann ein Gitter, wenn sie endlichen Index hat, wenn also die Gruppe Λ/Σ endlich ist.

Aufgabe 1.3 Zeige, dass die Summe, die die Riemannsche Zetafunktion definiert, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ absolut konvergiert. Hierbei kann der Beweis von Lemma 1.2.1 zur Orientierung dienen.

Aufgabe 1.4 Seien $\alpha, \beta, \alpha'\beta' \in \mathbb{C}$ mit $\mathbb{C} = \mathbb{R}\alpha + \mathbb{R}\beta = \mathbb{R}\alpha' + \mathbb{R}\beta'$. Zeige, dass die Gitter $\Lambda(\alpha, \beta)$ und $\Lambda(\alpha', \beta')$ genau dann übereinstimmen, wenn es ein $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 1.5 Sei f meromorph auf $\mathbb{C}$ und Λ-periodisch für ein Gitter Λ. Sei $\mathcal{F}_w = \mathcal{F} + w$ eine verschobene Fundamentalmasche zu Λ so dass auf $\partial\mathcal{F}_w$ keine Pol- oder Nullstelle von f liegt. Sei $S(0)$ die Summe aller Nullstellen von f in $\mathcal{F}$ (mit Vielfachheiten). Sei $S(\infty)$ die Summe aller Polstellen von f in $\mathcal{F}$ (mit Vielfachheiten). Zeige:

$$S(0) - S(\infty) \in \Lambda.$$

(Hinweis: Integriere $zf'(z)/f(z)$.)

Aufgabe 1.6 Zeige die Partialbruchentwicklung des Kotangens:

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+m} + \frac{1}{z-m} \right).$$

(Hinweis: die Differenz beider Seiten ist periodisch und ganz. Zeige, dass sie beschränkt ist.)

Aufgabe 1.7 Seien $z, w \in \mathbb{C}$ und sei $\wp$ die Weierstraß-$\wp$-Funktion zum Gitter Λ. Zeige, dass $\wp(z) = \wp(w)$ genau dann, wenn $z + w$ oder $z - w$ im Gitter Λ liegt.

Aufgabe 1.8 Sei Λ ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $\wp$ die Weierstraß-$\wp$-Funktion zu Λ.

(a) Seien $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_m$ komplexe Zahlen. Zeige dass die Funktion

$$f(z) = \frac{\prod_{i=1}^n \wp(z) - \wp(a_i)}{\prod_{j=1}^m \wp(z) - \wp(b_j)}$$

eine gerade Λ-periodische Funktion ist.

(b) Zeige, dass jede gerade meromorphe Λ-periodische Funktion eine rationale Funktion von $\wp$ ist.

(c) Zeige, dass jede Λ-periodische meromorphe Funktion von der Form $R(\wp(z)) + \wp'(z)Q(\wp(z))$ ist, wobei R und Q rationale Funktionen sind.

Anmerkungen

Setzt man $g_4 = 15G_4$ und $g_6 = 35G_6$ so sieht man, dass $(x, y) = (\wp, \wp'/2)$ die Gleichung

$$y^2 = x^3 - g_4 x - g_6$$

erfüllt. Dies bedeutet, dass die Abbildung $z \mapsto (\wp(z), \wp'(z)/2)$ die komplexe Mannigfaltigkeit $\mathbb{C}/\Lambda$ bijektiv auf die durch die obige Gleichung beschriebene *elliptische Kurve* abbildet. Man erhält in der Tat alle elliptischen Kurven über $\mathbb{C}$ auf diese Weise, elliptische Kurven werden also durch Gitter in $\mathbb{C}$ parametrisiert. In dem Buch [29] findet man eine gute Einführung in die Theorie der elliptischen Kurven.

Die in diesem Abschnitt auftretende Riemannsche Zetafunktion besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf die ganze komplexe Ebene und erfüllt eine Funktionalgleichung, wie in 6.1.2 gezeigt wird. Die berühmte *Riemann Hypothese* besagt, dass jede Nullstelle der Funktion $\zeta(s)$ im Streifen $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$ bereits bei $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ liegt. Diese Aussage gilt als die am härtesten umkämpfte ungelöste Vermutung der gesamten Mathematik.

http://www.springer.com/978-3-642-12389-4

Automorphe Formen
Deitmar, A.
2010, VIII, 252 S. 4 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-642-12389-4