Kapitel I

Topologische Räume

Wenn eine Menge T mit einer Metrik d versehen wird, haben wir die intuitive Idee des Abstands mathematisch präzise gefasst. Wir können quantitativ bestimmen, wie nahe zwei Punkte einander sind, und wir können qualitativ feststellen, ob ein Punkt t „unendlich nahe" bei einer Menge M liegt (präzise: ob $t \in \overline{M}$); für letzteres wird die Maschinerie der offenen und abgeschlossenen Mengen entwickelt.

Auf $\mathbb{R}^d$ betrachtet man zum Beispiel die Metriken ($s = (s_1, \dots, s_d)$, $t = (t_1, \dots, t_d)$)

$$\begin{aligned} d_1(s,t) &= \sum_{k=1}^{d} |s_k - t_k|, \\ d_2(s,t) &= \Bigl(\sum_{k=1}^{d} |s_k - t_k|^2\Bigr)^{1/2}, \\ d_3(s,t) &= \max_k |s_k - t_k|. \end{aligned}$$

Diese sind zwar verschieden, aber insofern qualitativ gleichwertig, als sie dieselben offenen Mengen auf $\mathbb{R}^d$ generieren. Anders liegen die Verhältnisse auf unendlichdimensionalen Räumen. Sei

$$C[0,1] = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}\colon \ f \text{ ist stetig}\}.$$

Die Metriken

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f(s) - g(s)|\, ds$$

und

$$d_2(f,g) = \sup_{s \in [0,1]} |f(s) - g(s)|$$

messen qualitativ unterschiedliche Abstandsbegriffe, da man leicht $f_n \in C[0,1]$ mit $d_1(f_n, 0) \leq 1/n$, aber $d_2(f_n, 0) \geq n$ konstruiert. (Im d_1-Sinn ist f_n sehr

D. Werner, *Einführung in die höhere Analysis*, 2nd ed., Springer-Lehrbuch,
DOI 10.1007/978-3-540-79696-1_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2009

nahe bei 0, im d_2-Sinn sehr weit davon entfernt.) In der Tat erzeugen die beiden Metriken unterschiedliche Systeme offener Mengen.

Konvergenz im Sinn der Metrik d_1 ist die Konvergenz im Integralmittel; Konvergenz im Sinn der Metrik d_2 ist die gleichmäßige Konvergenz. Ein weiterer natürlicher Konvergenzbegriff auf $C[0,1]$ ist die punktweise Konvergenz:

$$f_n \to f \text{ punktweise} \iff f_n(t) \to f(t) \quad \forall t \in [0,1].$$

Es zeigt sich, dass es *keine* Metrik gibt, aus der dieser Konvergenzbegriff abgeleitet werden kann. Jedoch kann die punktweise Konvergenz mit Hilfe einer allgemeineren mathematischen Struktur als der des metrischen Raums, nämlich der des topologischen Raums, studiert werden. Dabei geht man von einem ausgezeichneten System von (offen genannten) Mengen aus, das gewissen Eigenschaften genügt (siehe Definition I.2.1). Das Vorgehen ist also hier geometrisch, in der Tat lassen sich viele topologische Phänomene an zweidimensionalen Skizzen veranschaulichen.

Dieses Kapitel führt in die Sprache der mengentheoretischen Topologie ein; ein Steilkurs über metrische Räume findet sich im ersten Abschnitt.

I.1 Prolog: Metrische Räume

In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Tatsachen über metrische Räume zusammengestellt; Beweise finden sich in fast allen Analysisbüchern[1].

Eine Menge T, versehen mit einer Abbildung $d\colon T \times T \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften ($s, t, u \in T$ beliebig)

(a) $d(s,t) \ge 0$,
(b) $d(s,t) = d(t,s)$,
(c) $d(s,u) \le d(s,t) + d(t,u)$,
(d) $d(s,t) = 0 \iff s = t$,

wird *metrischer Raum* und d eine *Metrik* genannt. (c) heißt die *Dreiecksungleichung*. Gilt in (d) nur „$\Leftarrow$“, so spricht man von einem *pseudometrischen Raum*. In einem metrischen (oder pseudometrischen) Raum betrachte die Kugeln

$$U_\varepsilon(t) = \{s \in T\colon d(s,t) < \varepsilon\}.$$

Sei $M \subset T$. Ein Punkt $t \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, und M heißt *Umgebung* von t, falls

$$\exists \varepsilon > 0 \quad U_\varepsilon(t) \subset M.$$

Eine Teilmenge $O \subset T$, für die jedes $t \in O$ innerer Punkt ist, heißt *offen*.

Satz I.1.1 *Sei (T,d) ein metrischer Raum und τ die Menge aller offenen Teilmengen von T.*

[1] Vgl. etwa O. Forster, *Analysis 2*, Vieweg.

(a) *$\emptyset \in \tau$, $T \in \tau$.*
(b) *Sind $O_1 \in \tau$ und $O_2 \in \tau$, so gilt $O_1 \cap O_2 \in \tau$.*
(c) *Ist I eine beliebige Indexmenge und sind $O_i \in \tau$ ($i \in I$), so ist auch $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$.*

Allgemeiner nennt man ein System von Teilmengen einer Menge T, welches die obigen Bedingungen (a)–(c) erfüllt, eine *Topologie* auf T und spricht von T als topologischem Raum; siehe Definition I.2.1. Metrische Räume wurden zuerst von Fréchet (1906) und topologische Räume zuerst von Hausdorff (1914) betrachtet.

Eine Teilmenge A eines metrischen Raums heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $T \setminus A$ offen ist. Analog zu Satz I.1.1 gelten also:

(a) $\emptyset$ und T sind abgeschlossen.
(b) Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
(c) Der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Bedingung (c) impliziert, dass für jede Teilmenge $M \subset T$ eine kleinste abgeschlossene Menge existiert, die M umfasst. Diese wird mit $\overline{M}$ bezeichnet und *Abschluss* von M genannt:

$$\overline{M} := \bigcap_{\substack{A\supset M \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$$

Analog ist das *Innere* von M

$$\operatorname{int} M := \bigcup_{\substack{O\subset M \\ O \text{ offen}}} O$$

die größte offene Menge, die in M liegt. Offenbar besteht $\operatorname{int} M$ genau aus den inneren Punkten von M.

Der *Rand* von M ist

$$\partial M := \{t \in T\colon U_\varepsilon(t) \cap M \neq \emptyset \text{ und } U_\varepsilon(t) \cap T\backslash M \neq \emptyset \ \forall \varepsilon > 0\}.$$

∂M ist stets abgeschlossen, und es gilt $\overline{M} = M \cup \partial M$ sowie $\partial M = \overline{M} \setminus \operatorname{int} M$.

Eine Folge (t_n) in einem metrischen Raum T heißt *konvergent* gegen $t \in T$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \quad d(t_n, t) \leq \varepsilon.$$

t heißt *Limes* von (t_n). Es ist leicht zu sehen, dass der Limes einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist. (Das gilt nicht mehr in pseudometrischen Räumen.) Man schreibt $t_n \to t$ oder $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Besitzt t nur die Eigenschaft, dass jede Umgebung von t unendlich viele Folgenglieder enthält, heißt t *Häufungspunkt* von (t_n).

Satz I.1.2 *Folgende Bedingungen sind in einem metrischen Raum äquivalent:*

(i) $t \in \overline{M}$.

(ii) *Es existiert eine Folge* (t_n) *in* M *mit* $t_n \to t$.

Als Korollar folgt:

Korollar I.1.3 *Folgende Bedingungen sind in einem metrischen Raum äquivalent:*

(i) A *ist abgeschlossen.*

(ii) *Für jede konvergente Folge* (t_n) *in* A *ist* $\lim_n t_n \in A$.

Seien (T_1, d_1) und (T_2, d_2) metrische Räume. Dann definiert

$$d\big((s_1, s_2), (t_1, t_2)\big) = d_1(s_1, t_1) + d_2(s_2, t_2)$$

eine Metrik auf dem Produktraum $T_1 \times T_2$. Eine Folge $\big((x_n, y_n)\big)$ in $T_1 \times T_2$ konvergiert genau dann gegen (x, y), wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gelten.

Sei nun $f\colon T_1 \to T_2$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann heißt f *stetig an der Stelle* $t_0 \in T_1$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad d_1(t, t_0) < \delta \Rightarrow d_2\big(f(t), f(t_0)\big) < \varepsilon.$$

Man erhält eine äquivalente Definition, wenn man „$\leq$“ statt „$<$“ verwendet. Offenbar ist f genau dann stetig bei t_0, wenn für jede Umgebung V von $f(t_0)$ das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von t_0 ist.

Satz I.1.4 *Sei* $f\colon T_1 \to T_2$ *eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) f *ist stetig bei* t_0.

(ii) $t_n \to t_0 \Rightarrow f(t_n) \to f(t_0)$ *für alle Folgen* (t_n).

Eine Abbildung $f\colon T_1 \to T_2$ heißt schlechthin *stetig*, falls sie an jeder Stelle $t_0 \in T_1$ stetig ist. Nach Definition ist die Stetigkeit also eine lokale Eigenschaft; denn es geht an jeder Stelle t_0 nur das Verhalten von f in einer Umgebung von t_0 ein.

Satz I.1.5 *Für eine Abbildung* f *zwischen metrischen Räumen* T_1 *und* T_2 *sind äquivalent:*

(i) f *ist stetig.*

(ii) *Für alle offenen* $O \subset T_2$ *ist* $f^{-1}(O)$ *offen in* T_1.

(iii) *Für alle abgeschlossenen* $A \subset T_2$ *ist* $f^{-1}(A)$ *abgeschlossen in* T_1.

Eine Metrik induziert nicht nur eine topologische Struktur, sondern auch eine *uniforme Struktur*, die sich in den Begriffen Cauchyfolge, Vollständigkeit und gleichmäßige Stetigkeit manifestiert; diese Begriffe haben kein Gegenstück in der Theorie der topologischen Räume. Eine *Cauchyfolge* in einem metrischen Raum (T, d) ist durch die Forderung

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n, m \geq N \quad d(t_n, t_m) \leq \varepsilon$$

definiert. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge konvergiert. Mit T_1 und T_2 ist auch $T_1 \times T_2$ vollständig.

Es ist zu beachten, dass verschiedene Metriken auf einer Menge zwar dieselbe Topologie, aber unterschiedliche uniforme Strukturen erzeugen können. Wird z.B. $\mathbb{R}$ mit der Metrik $d_2(s, t) = |\arctan s - \arctan t|$ versehen, so sind die d_2-offenen Mengen genau die üblichen offenen Mengen; jedoch ist die Folge (n) der natürlichen Zahlen eine nicht konvergente Cauchyfolge. Daher ist $(\mathbb{R}, d_2)$ nicht vollständig.

Eine Abbildung $f\colon T_1 \to T_2$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall s, t \in T_1 \quad d_1(s, t) < \delta \Rightarrow d_2\bigl(f(s), f(t)\bigr) < \varepsilon.$$

Bei der Definition der Stetigkeit darf δ vom betrachteten Punkt t abhängen; bei der gleichmäßigen Stetigkeit hat man δ unabhängig von t zu wählen. Im Gegensatz zur Stetigkeit handelt es sich hier also um eine globale Eigenschaft.

Ein zentraler topologischer Begriff ist der der Kompaktheit. Ein metrischer Raum T heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Mit anderen Worten, wenn (O_i) eine Familie offener Mengen mit $T = \bigcup_{i \in I} O_i$ ist, so existieren endlich viele $O_{i_1}, \dots, O_{i_n}$ mit $T = \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}$.

Ist (T, d) ein metrischer Raum und $S \subset T$, so kann (S, d) als eigenständiger metrischer Raum angesehen werden. Ist T kompakt und $S \subset T$ abgeschlossen, so ist auch S kompakt. Ist T ein beliebiger metrischer Raum und $S \subset T$ kompakt, so ist S abgeschlossen. Beachte, dass die Abgeschlossenheit nur mit Bezug auf einen größeren Raum formuliert werden kann (S ist abgeschlossen *in* T); hingegen ist die Kompaktheit ein intrinsischer Begriff.

Wenn $f\colon T_1 \to T_2$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen ist und T_1 kompakt ist, so ist auch $f(T_1)$ kompakt. Ferner ist unter diesen Voraussetzungen f gleichmäßig stetig.

Eine reiche Quelle metrischer Räume bieten die *normierten Räume*, das sind Vektorräume X über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, die mit einer *Norm*, also einer Abbildung $x \mapsto \|x\|$ mit ($x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ beliebig)

(a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,
(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

versehen sind. Wieder nennt man (c) die Dreiecksungleichung. Eine Norm induziert vermöge

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik auf X. Es ist begrifflich zu beachten, dass ein normierter Raum immer ein Vektorraum ist, während ein metrischer Raum im allgemeinen keine algebraische Struktur trägt. Beispiele für normierte Räume sind $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ mit der *euklidischen Norm* ($x = (t_1, \dots, t_n)$)

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |t_k|^2\right)^{1/2}$$

oder der Raum $\ell^\infty(T)$ aller beschränkten Funktionen auf einer Menge T mit der *Supremumsnorm*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in T} |f(t)|.$$

Ein normierter Raum, der in der obigen Metrik vollständig ist, heißt nach dem polnischen Mathematiker Stefan Banach (1892–1945) *Banachraum*; die beiden obigen Beispiele sind jeweils Banachräume. Kapitel V beschäftigt sich ausführlich mit normierten und Banachräumen.

I.2 Grundbegriffe

Wir führen nun nach und nach das Vokabular der topologischen Räume ein.

Definition I.2.1 Sei T eine Menge. Eine *Topologie* auf T ist ein System τ von Teilmengen von T mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\emptyset \in \tau$, $T \in \tau$.

(b) Sind $O_1, O_2 \in \tau$, so ist auch $O_1 \cap O_2 \in \tau$.

(c) Ist I eine Indexmenge und sind $O_i \in \tau$ für alle $i \in I$, so ist auch $\bigcup_{i\in I} O_i \in \tau$.

Man nennt (T, τ) (oder auch T selbst, wenn die explizite Angabe von τ nicht notwendig erscheint) einen *topologischen Raum*; die in τ versammelten Mengen werden auch *offen* (genauer τ-*offen*) genannt.

Durch Induktion folgt aus (b), dass der Schnitt endlich vieler offener Mengen wieder offen ist.

Beispiele. (a) Sei d eine Metrik auf einer Menge T. Wir verwenden die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(t) &= \{s \in T\colon d(s,t) < \varepsilon\}, \\ B_\varepsilon(t) &= \{s \in T\colon d(s,t) \le \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Bekanntlich heißt eine Teilmenge O des metrischen Raums (T, d) offen, wenn

$$\forall t \in O\ \exists \varepsilon > 0\ \ U_\varepsilon(t) \subset O. \tag{I.1}$$

Es ist einfach zu sehen, dass die offenen Mengen eines metrischen Raums eine Topologie bilden (selbst die leere Menge erfüllt (I.1), da es überhaupt kein $t \in \emptyset$ gibt). Wir werden sehen, dass viele Begriffe aus der Theorie der metrischen Räume ein direktes Analogon in der Theorie der topologischen Räume haben (z.B. die Begriffe abgeschlossen, stetig, kompakt, konvergent, ...). Andererseits gibt es viele natürliche Beispiele topologischer Räume, die nicht auf die soeben beschriebene Weise von einer Metrik abgeleitet werden können; siehe Aufgabe I.9.20. Topologien, die gemäß Beispiel (a) entstehen, heißen *metrisierbar*. Metrisierbare Topologien sind in vieler Hinsicht einfacher als andere; vergleiche etwa Satz I.5.4 mit den Gegenbeispielen auf Seite 29 oder siehe Aufgabe I.9.9. Jedoch ist es oft einfacher, topologische Phänomene metrischer Räume direkt durch die offenen Mengen statt mit Hilfe einer Metrik zu untersuchen; ein Beispiel dafür ist das Beispiel (e) unten, das wir (einfach) als topologischen Raum einführen, das man aber auch (kompliziert, siehe Aufgabe I.9.19(d)) als metrischen Raum beschreiben kann. Um sich die Vorteile metrischer Räume zunutze zu machen, genügt es in der Regel zu wissen, dass es eine erzeugende Metrik gibt, ohne sie explizit zu kennen.

(b) Auf einer beliebigen Menge T ist $\{\emptyset, T\}$ eine Topologie. Sie heißt *indiskrete* (oder *chaotische*) *Topologie*.

(c) Ein weiteres einfaches Beispiel einer Topologie ist die Potenzmenge. Sie wird *diskrete Topologie* genannt und ist offensichtlich die feinste (= größte) Topologie, die eine Menge tragen kann, denn bezüglich der diskreten Topologie ist jede Menge offen. Formal ist dies ein Spezialfall von Beispiel (a), denn die Metrik

$$d(s,t) = \begin{cases} 1 & s \neq t \\ 0 & s = t \end{cases}$$

erzeugt die diskrete Topologie.

(d) Ein Standardbeispiel, das weniger durch seinen praktischen Nutzen besticht, als dass es als Testfall für den zu entwickelnden Begriffsapparat dient, ist der *Sierpiński-Raum* $\{0,1\}$, versehen mit der Topologie $\tau = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$. Es ist klar, dass es sich in der Tat um eine Topologie handelt.

Bevor wir zu weiteren Beispielen kommen, benötigen wir ein paar Vokabeln.

Definition I.2.2 Eine Teilmenge A eines topologischen Raums T heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $T \setminus A$ offen ist.

Es gelten also:

- (a)′ T und $\emptyset$ sind abgeschlossen.
- (b)′ Die Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (c)′ Der Schnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.

Durch Induktion wieder folgt aus (b)′, dass die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist.

Achtung: Im allgemeinen gibt es Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind, und es kann vorkommen, dass eine Menge sowohl offen als auch abgeschlossen ist (mehr dazu im Abschnitt I.6).

Definition I.2.3 Sei T ein topologischer Raum und $M \subset T$.

(a) Der *Abschluss* von M ist

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{A \supset M \\ A \text{ abgeschlossen}}} A.$$

(b) Das *Innere* von M ist

$$\operatorname{int} M = \bigcup_{\substack{O \subset M \\ O \text{ offen}}} O$$

(c) Ein Element von $\operatorname{int} M$ heißt *innerer Punkt* von M.

(d) Der *Rand* von M ist

$$\partial M = \overline{M} \setminus \operatorname{int} M.$$

Es ist klar, dass $\overline{M}$ als Schnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen ist, und offensichtlich ist $\overline{M}$ die kleinste abgeschlossene Menge, die M umfasst. Genauso ist $\operatorname{int} M$ die größte offene Menge, die in M liegt. Der Rand ∂M ist wegen

$$\partial M = \overline{M} \cap (T \setminus \operatorname{int} M)$$

stets abgeschlossen, denn $T \setminus \operatorname{int} M$ ist als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen. Genau dann ist M abgeschlossen (bzw. offen), wenn $M = \overline{M}$ (bzw. $M = \operatorname{int} M$) ist.

Definition I.2.4 Sei T ein topologischer Raum und $t \in T$. Eine Teilmenge $U \subset T$ heißt *Umgebung* von t, wenn $t \in \operatorname{int} U$ ist. Eine *Umgebungsbasis* $\mathfrak{U}_t$ von t ist ein System von Umgebungen von t, so dass jede Umgebung V von t ein $U \in \mathfrak{U}_t$ umfasst.

Die Definitionen I.2.2–I.2.4 sind wörtlich wie in der Theorie der metrischen Räume; in einem metrischen Raum arbeitet man natürlich mit der Umgebungsbasis der ε-Kugeln oder auch der der Kugeln mit Radius $1/n$ ($n \in \mathbb{N}$). Achtung: eine Umgebung braucht nicht offen zu sein; daher kann man im metrischen Fall auch die abgeschlossenen Kugeln $B_\varepsilon(t)$ als Umgebungen nehmen.

Wir wollen diese Begriffe an einem Beispiel verdeutlichen.

Beispiel. (e) Eine *arithmetische Progression* ist eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ der Form

$$N_{a,b} = \{a + kb \colon k \in \mathbb{Z}\},$$

wobei $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Wir betrachten folgende Topologie auf $\mathbb{Z}$: $O \subset \mathbb{Z}$ sei offen, wenn

$$\forall n \in O\ \exists b \in \mathbb{N}\quad N_{n,b} \subset O. \tag{I.2}$$

Es ist klar, dass (a) und (c) aus Definition I.2.1 erfüllt sind. Um (b) zu zeigen, seien O_1 and O_2 offen und $n \in O_1 \cap O_2$. Wähle $b_1, b_2 \in \mathbb{N}$ mit $N_{n,b_1} \subset O_1$, $N_{n,b_2} \subset O_2$. Dann ist $N_{n,b_1 b_2} \subset N_{n,b_1} \cap N_{n,b_2} \subset O_1 \cap O_2$, was die Offenheit von $O_1 \cap O_2$ beweist. Daher haben wir wirklich eine Topologie definiert.

Nach Konstruktion ist jede arithmetische Progression $N_{a,b}$ offen; aber

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{l=1}^{b-1} N_{a+l,b}$$

zeigt, dass $N_{a,b}$ auch abgeschlossen ist, denn $\bigcup_{l=1}^{b-1} N_{a+l,b}$ ist eine endliche Vereinigung offener Mengen, also offen.

Das Innere von $\mathbb{N}$ ist nach (I.2) leer, und da $\operatorname{int}(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ ebenfalls leer ist, folgt $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}$.

Eine Umgebungsbasis von $n \in \mathbb{Z}$ wird durch $\mathfrak{U}_n = \{N_{n,b} \colon b \in \mathbb{N}\}$ gegeben.

Die bisherigen Überlegungen gestatten einen „topologischen“ Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt[2]. Wäre nämlich die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen endlich, wäre $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ eine endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen, also abgeschlossen. Da jede natürliche Zahl ≥ 2 einen Primteiler hat (Beweis durch vollständige Induktion), ist $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$, so dass $\{-1, 1\}$ offen wäre, was wegen (I.2) natürlich falsch ist.

Wir bringen jetzt simple Charakterisierungen des Abschlusses und des Randes einer Menge.

Lemma I.2.5 *Sei T ein topologischer Raum und $M \subset T$. Dann ist $t \in \overline{M}$ genau dann, wenn $U \cap M \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von t gilt. Es reicht, das für alle Umgebungen einer Umgebungsbasis von t zu fordern.*

Beweis. Sei $t \in \overline{M}$ und U eine Umgebung von t. Dann ist $V = \operatorname{int} U$ eine offene Umgebung von t. Wäre $U \cap M = \emptyset$, so wäre auch $V \cap M = \emptyset$, d.h. $T \setminus V$ wäre eine abgeschlossene Menge, die M umfasst. Es folgt dann $\overline{M} \subset T \setminus V$ und insbesondere $t \in T \setminus V$: Widerspruch!

Sei umgekehrt $\mathfrak{U}_t$ eine Umgebungsbasis von t, so dass $U \cap M \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}_t$. Wäre $t \notin \overline{M}$, gäbe es eine abgeschlossene Menge $A \supset M$ mit $t \notin A$; es folgt, dass $O = T \setminus A$ offen ist, t enthält, aber $O \cap M = \emptyset$. Wähle $U \in \mathfrak{U}_t$ mit $t \in U \subset O$; dann ist also auch $U \cap M = \emptyset$: Widerspruch! □

[2] H. Furstenberg, *On the infinitude of primes*, Amer. Math. Monthly 62 (1955), 353; siehe auch S.W. Golomb, *A connected topology for the integers*, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 663–665.

Lemma I.2.6 *Sei T ein topologischer Raum und $M \subset T$. Dann ist $t \in \partial M$ genau dann, wenn für jede Umgebung U von t sowohl $U \cap M \neq \emptyset$ als auch $U \cap (T \setminus M) \neq \emptyset$ gelten. Es reicht, das für alle Umgebungen einer Umgebungsbasis von t zu fordern.*

Beweis. Sei $t \in \partial M$ und U eine Umgebung von t. Wäre $U \subset M$, wäre $t \in \operatorname{int} M$; also muss $U \cap (T \setminus M) \neq \emptyset$ gelten. Wegen $t \in \overline{M}$ ist nach Lemma I.2.5 auch $U \cap M \neq \emptyset$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{U}_t$ eine Umgebungsbasis von t mit $U \cap M \neq \emptyset$ und $U \cap (T \setminus M) \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}_t$, so gilt zunächst $t \in \overline{M}$ nach Lemma I.2.5. Wäre $t \in \operatorname{int} M$, gäbe es $U \in \mathfrak{U}_t$ mit $t \in U \subset M$ im Widerspruch zu $U \cap (T \setminus M) \neq \emptyset$. □

Als nächstes geben wir eine systematische Methode an, Topologien zu konstruieren, die (I.1) und (I.2), welche ja große Ähnlichkeit besitzen, verallgemeinert.

Satz I.2.7 *Sei T eine Menge. Jedem $t \in T$ sei ein nichtleeres System $\mathfrak{U}_t$ mit folgenden Eigenschaften zugeordnet:*

(1) $t \in U$ *für alle* $U \in \mathfrak{U}_t$,

(2) $\forall U, V \in \mathfrak{U}_t \ \exists W \in \mathfrak{U}_t \quad W \subset U \cap V$,

(3) $\forall U \in \mathfrak{U}_t \ \forall s \in U \ \exists V \in \mathfrak{U}_s \quad V \subset U$.

Dann ist

$$\tau = \{O \subset T \colon \forall t \in O \ \exists U \in \mathfrak{U}_t \quad U \subset O\}$$

eine Topologie, alle $U \in \mathfrak{U}_t$ sind offen, und $\mathfrak{U}_t$ ist eine Umgebungsbasis von t.

Beweis. Beim Nachweis, dass τ eine Topologie ist, sind (a) und (c) aus Definition I.2.1 klar, und die obige Bedingung (2) zeigt (b) aus Definition I.2.1. Unsere Bedingung (3) bedeutet, dass alle $U \in \mathfrak{U}_t$ offen sind, insbesondere sind sie Umgebungen von t. Nach Konstruktion von τ ist $\mathfrak{U}_t$ eine Umgebungsbasis von t. □

Mit Hilfe von Satz I.2.7 können wir zwei für die Analysis besonders wichtige Topologien erklären.

Beispiele. (f) Sei S eine Menge und $T = \mathbb{R}^S$ die Menge aller reellwertigen Funktionen auf S. Seien $F \subset S$ eine endliche Menge, $\varepsilon > 0$ und $f \in T$. Wir setzen

$$U_{F,\varepsilon}(f) = \{g \in T \colon |f(s) - g(s)| < \varepsilon \ \forall s \in F\}$$

sowie

$$\mathfrak{U}_f = \{U_{F,\varepsilon}(f) \colon F \subset S \text{ endlich}, \ \varepsilon > 0\}.$$

Die $\mathfrak{U}_f$ erfüllen die Voraussetzung von Satz I.2.7: (1) ist klar, und

$$U_{F_1 \cup F_2, \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}(f) \subset U_{F_1,\varepsilon_1}(f) \cap U_{F_2,\varepsilon_2}(f)$$

(bestätige dies!) zeigt (2). Seien schließlich F und ε gegeben sowie $g \in U_{F,\varepsilon}(f)$. Setze $\varepsilon' = \varepsilon - \max\{|f(s) - g(s)|\colon s \in F\} > 0$. Dann ist $U_{F,\varepsilon'}(g) \subset U_{F,\varepsilon}(f)$, also gilt auch (3). Die mit Satz I.2.7 konstruierte Topologie wird *Topologie der punktweisen Konvergenz* (und später *Produkttopologie*) genannt; wir werden sehen, dass sie in der Tat die punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen beschreibt.

Analog wird diese Topologie auf M^S erklärt, wenn M ein metrischer Raum ist.

(g) Wir betrachten $T = C(\mathbb{R})$, die Menge aller stetigen reellwertigen Funktionen auf[3] $\mathbb{R}$. Seien $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, $\varepsilon > 0$ und $f \in T$. Setze

$$\begin{aligned} U_{K,\varepsilon}(f) &= \{g \in T\colon |f(s) - g(s)| < \varepsilon \ \forall s \in K\}, \\ \mathfrak{U}_f &= \{U_{K,\varepsilon}(f)\colon K \subset \mathbb{R} \text{ kompakt}, \varepsilon > 0\}. \end{aligned}$$

Wie unter (f) sieht man, dass Satz I.2.7 Anlass zu einer Topologie gibt, so dass die $\mathfrak{U}_f$ Umgebungsbasen von f werden; beachte hierfür

$$g \in U_{K,\varepsilon}(f) \ \Rightarrow \ \sup_{s \in K} |f(s) - g(s)| < \varepsilon,$$

denn f und g sind stetig und K ist kompakt. Diese Topologie heißt *Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta*, und wieder stellt sich heraus (siehe Aufgabe I.9.21), dass sie ihren Namen zu Recht trägt. Sie lässt sich analog für jeden metrischen Raum S auf dem Funktionenraum $C(S)$ der reell- oder komplexwertigen Funktionen auf S erklären[4].

Die $U_{F,\varepsilon}$ bzw. $U_{K,\varepsilon}$ in diesen Beispielen übernehmen die Rolle der Kugeln im metrischen Fall; beachte jedoch, dass die Sache durch den zweiten Parameter F bzw. K erheblich komplizierter wird.

Nun zwei weitere Vokabeln.

Definition I.2.8 Seien T ein topologischer Raum und $D, M \subset T$. D heißt *dicht in* M, falls $M \subset \overline{D}$. Im Fall $M = T$ sagt man auch einfach, D sei dicht. T heißt *separabel*, falls es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Auch diese Begriffe sind wörtlich der metrischen Theorie entnommen. Einige Beispiele hierzu:

• Wird T mit der indiskreten Topologie versehen, liegt jede nichtleere Teilmenge dicht.

• Im Beispiel (e) liegt $\mathbb{N}$ dicht in $\mathbb{Z}$, wie dort bemerkt wurde.

• Wir betrachten auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Topologie der punktweisen Konvergenz (Beispiel (f)) und behaupten, dass $C(\mathbb{R})$ dicht liegt. Dazu ist zu zeigen, dass jede

---

[3] Wenn im folgenden von topologischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^d$ ohne Spezifikation einer Topologie die Rede ist, ist stets die von der euklidischen Metrik abgeleitete Topologie (die „natürliche Topologie“) gemeint.

[4] Wer dieses Kapitel durchgearbeitet hat, wird sogar in der Lage sein, dies für topologische Räume S zu tun.

nichtleere offene Menge in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ eine stetige Funktion enthält, d.h. (Bezeichnungen wie unter (f)) dass jedes $U_{F,\varepsilon}(f)$ eine stetige Funktion enthält. Das sieht man so: Schreibt man $F = \{s_1, \dots, s_n\}$, wähle man einfach eine stückweise lineare stetige Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(s_j) = f(s_j)$ für alle j; dann ist natürlich $g \in U_{F,\varepsilon}(f)$. Das Argument zeigt, wie schwach die Forderung an eine Funktion g ist, bezüglich dieser Topologie in einer Umgebung von f zu liegen.

Nun studieren wir Unterräume topologischer Räume. Ist T ein metrischer Raum und $S \subset T$, so wird S durch Einschränkung der Metrik auf $S \times S$ selbst ein metrischer Raum. Offensichtlich ist eine Teilmenge $O \subset S$ genau dann offen in S, wenn O von der Form $O' \cap S$ für eine in T offene Teilmenge $O' \subset T$ ist. Diese Überlegung gibt zu folgender Definition Anlass.

Definition I.2.9 Sei (T, τ) ein topologischer Raum und $S \subset T$. Dann heißt

$$\tau|_S = \{O' \cap S\colon O' \in \tau\}$$

die *Relativtopologie* (oder *Spurtopologie*) von τ auf S. Ist $O \in \tau|_S$, so nennt man O *relativ offen* in S, und $S \setminus O$ heißt *relativ abgeschlossen* in S.

Es ist klar, dass $\tau|_S$ wirklich eine Topologie auf S ist. Hier noch ein Beispiel: Sei $T = \mathbb{R}$ mit der von der üblichen Metrik induzierten Topologie versehen und $S = [0, 2)$. Dann ist $[0, 1)$ relativ offen in S, und $[1, 2)$ ist relativ abgeschlossen in S.

Lemma I.2.10 *Sei (T, τ) ein topologischer Raum und $S \subset T$.*

(a) *Sei S offen in T, und sei $O \subset S$. Genau dann ist O relativ offen in S, wenn O offen in T ist.*

(b) *Sei S abgeschlossen in T, und sei $A \subset S$. Genau dann ist A relativ abgeschlossen in S, wenn A abgeschlossen in T ist.*

Beweis. (a) Ist O offen, so ist O wegen $O = O \cap S$ auch relativ offen. Ist O relativ offen, so existiert eine offene Menge O' mit $O = O' \cap S$. Da S offen ist, ist O auch offen.

(b) wird genauso gezeigt. □

I.3 Stetige Abbildungen

Wir versuchen als erstes, die Definition der Stetigkeit von Abbildungen zwischen metrischen Räumen in eine Sprache ohne ε und δ zu übersetzen. Seien (T_1, d_1) und (T_2, d_2) metrische Räume und $f\colon T_1 \to T_2$ eine Abbildung. Bekanntlich heißt f stetig bei $t \in T_1$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \quad d_1(s, t) < \delta \ \Rightarrow\ d_2(f(s), f(t)) < \varepsilon. \tag{I.3}$$

Bezeichnen wir die Kugeln in T_1 bzw. T_2 mit

$$\begin{aligned} U_r(t) &= \{s \in T_1 \colon d_1(s,t) < r\}, \\ V_r(t) &= \{s \in T_2 \colon d_2(s,t) < r\}, \end{aligned}$$

so heißt (I.3)

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \quad s \in U_\delta(t) \ \Rightarrow\ f(s) \in V_\varepsilon(f(t))$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \quad U_\delta(t) \subset f^{-1}\bigl(V_\varepsilon(f(t))\bigr),$$

und das heißt schließlich

- *Für jede Umgebung V von $f(t)$ ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von t.*

Das legt folgende Definition nahe.

Definition I.3.1 Seien (T_1, τ_1) und (T_2, τ_2) topologische Räume und $f\colon T_1 \to T_2$ eine Abbildung. f heißt *stetig bei* $t \in T_1$, wenn für jede Umgebung V von $f(t)$ das Urbild $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von t ist. f heißt *stetig auf* T_1, wenn f an jedem Punkt $t \in T_1$ stetig ist.

Offensichtlich reicht es für die Stetigkeit von f bei t, dass $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von t ist, wenn V eine Umgebungsbasis von $f(t)$ durchläuft.

Satz I.3.2 *Für eine Abbildung f zwischen topologischen Räumen T_1 und T_2 sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(i) *f ist stetig.*
(ii) *Für alle offenen Mengen $O \subset T_2$ ist $f^{-1}(O)$ offen in T_1.*
(iii) *Für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset T_2$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in T_1.*
(iv) *Für alle Mengen $M \subset T_1$ gilt $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $t \in f^{-1}(O)$; dann ist $f(t) \in O$, also O eine offene Umgebung von $f(t)$. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(O)$ eine Umgebung von t, d.h. t ist innerer Punkt von $f^{-1}(O)$. Weil t beliebig war, ist $f^{-1}(O)$ offen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Klar durch Komplementbildung.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): Sei $A \subset T_2$ abgeschlossen mit $f(M) \subset A$, also $M \subset f^{-1}(A)$. Wegen (iii) gilt auch $\overline{M} \subset f^{-1}(A)$. Da A eine beliebige abgeschlossene Menge war, ist nach Definition des Abschlusses $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $t \in T_1$, und sei V eine offene Umgebung von $f(t)$. Betrachte $M = T_1 \setminus f^{-1}(V)$ und $U = T_1 \setminus \overline{M}$. Wegen (iv) folgt $t \in U$, weil $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)} \subset \overline{T_2 \setminus V} = T_2 \setminus V$ ist, denn $M = \{s\colon f(s) \notin V\}$ und V ist offen. Da $f(U) \subset V$, ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von t, so dass f stetig bei t ist. Das war zu zeigen. □

Achtung: (ii) besagt nicht, dass f offene Mengen auf offene Mengen abbildet (Abbildungen, die das leisten, heißen *offen*), und (iii) besagt nicht, dass f

abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen abbildet (Abbildungen, die das leisten, heißen *abgeschlossen*). Zum Beispiel bildet die stetige Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(s,t) = s$, die abgeschlossene Menge $A = \{(s,t)\colon s \geq 0,\ st \geq 1\}$ auf das Intervall $(0,\infty)$ ab.

Beispiele. (a) Trägt T_1 die diskrete Topologie und ist T_2 irgendein topologischer Raum, so ist jede Abbildung $f\colon T_1 \to T_2$ stetig. (Das ist klar.)

(b) Trägt T_2 die indiskrete Topologie und ist T_1 irgendein topologischer Raum, so ist ebenfalls jede Abbildung $f\colon T_1 \to T_2$ stetig. (Das ist auch klar.)

(c) Wir betrachten $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Dann ist bei festem $s_0 \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f(s_0)$, stetig; $\mathbb{R}$ trägt hier die übliche Topologie. In der Tat gilt mit der Bezeichnung

$$U_{F,\varepsilon}(f) = \{g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ |f(s) - g(s)| < \varepsilon\ \forall s \in F\}$$

($F \subset \mathbb{R}$ endlich, $\varepsilon > 0$)

$$\varphi(U_{\{s_0\},\varepsilon}(f)) \subset \{y \in \mathbb{R}\colon |y - f(s_0)| < \varepsilon\} =: V_\varepsilon,$$

d.h. $U_{\{s_0\},\varepsilon}(f) \subset \varphi^{-1}(V_\varepsilon)$, so dass $\varphi^{-1}(V_\varepsilon)$ eine Umgebung von f ist. Hingegen ist $\psi\colon \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi(f) = \limsup_{t\to\infty} \arctan f(t)$, an jeder Stelle unstetig, denn kein $U_{F,\varepsilon}(f)$ erfüllt $\psi(U_{F,\varepsilon}(f)) \subset \{y \in \mathbb{R}\colon |y - \psi(f)| < 1\}$; wenn nämlich g an endlich vielen Stellen „ε-nahe“ bei f liegt, sagt das nichts über $\limsup_{t\to\infty} \arctan g(t)$ aus.

(d) Bisweilen ist es nützlich, verschiedene Topologien auf derselben Menge zu betrachten. Die Aussage

$$\mathrm{id}\colon (T,\tau_1) \to (T,\tau_2) \text{ ist stetig}$$

heißt dann, dass jede τ_2-offene Menge auch τ_1-offen ist. Man nennt in diesem Fall τ_1 *feiner* als τ_2 und τ_2 *gröber* als τ_1. Zum Beispiel ist auf $T = C(\mathbb{R})$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta feiner als die Topologie der punktweisen Konvergenz (Beispiele I.2(f) und I.2(g)).

In Satz I.3.2 kann die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) (bzw. (i) $\Rightarrow$ (iii)) zu eleganten Beweisen der Offenheit (bzw. Abgeschlossenheit) von Mengen führen. Betrachten wir etwa $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Mengen der Form ($S \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge)

$$A = \{g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}\colon |g(s) - f(s)| \leq \varepsilon\ \forall s \in S\}$$

sind aus folgendem Grund abgeschlossen: In Beispiel I.3(c) wurde die Stetigkeit der Auswertungsabbildungen $\varphi_s\colon \mathbb{R}^\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_s(g) = g(s)$, gezeigt. Also sind Mengen der Form

$$A_s = \{g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}\colon |g(s) - f(s)| \leq \varepsilon\} = \varphi_s^{-1}\bigl([f(s) - \varepsilon, f(s) + \varepsilon]\bigr)$$

abgeschlossen, und $A = \bigcap_{s\in S} A_s$ ist es auch.

Jetzt folgen einige allgemeine Bemerkungen über stetige Abbildungen.

Satz I.3.3 *Seien T_1, T_2 und T_3 topologische Räume.*

(a) *Ist $f\colon T_1 \to T_2$ stetig bei t und $g\colon T_2 \to T_3$ stetig bei $f(t)$, so ist die Komposition $g \circ f\colon T_1 \to T_3$ stetig bei t. Die Komposition stetiger Abbildungen ist also stetig.*

(b) *Ist $f\colon T_1 \to T_2$ stetig und wird $S \subset T_1$ mit der Relativtopologie versehen, so ist die Restriktion $f|_S\colon S \to T_2$ stetig.*

(c) *Sei $f\colon T_1 \to T_2$ eine Abbildung und $f(T_1) \subset N \subset T_2$; N werde mit der Relativtopologie versehen. Dann ist $f\colon T_1 \to T_2$ genau dann stetig, wenn $\tilde{f}\colon T_1 \to N$ stetig ist.*

Beweis. (a) Ist W eine Umgebung von $g(f(t))$, so ist $V := g^{-1}(W)$ eine Umgebung von $f(t)$, da g stetig bei $f(t)$ ist, und $U := f^{-1}(V)$ eine Umgebung von t, da f stetig bei t ist. Aber $U = (g \circ f)^{-1}(W)$; daher gilt (a).

(b) Sei $O \subset T_2$ offen; dann ist $(f|_S)^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap S$ relativ offen.

(c) Schreiben wir $j\colon N \to T_2$ für die identische Einbettung, so ist j nach Definition der Relativtopologie stetig. Also ist $f = j \circ \tilde{f}$ nach (a) stetig, wenn $\tilde{f}$ es ist. Ist umgekehrt f stetig und $O \subset N$ relativ offen, so schreibe $O = O' \cap N$ mit einer offenen Menge $O' \subset T_2$. Dann ist $\tilde{f}^{-1}(O) = f^{-1}(O')$ offen und daher $\tilde{f}$ stetig. □

Satz I.3.4 *Seien $f, g\colon T \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem topologischen Raum T; $\mathbb{R}$ trage die übliche Topologie. Dann sind auch die punktweise definierten Funktionen $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ und, falls g nie den Wert 0 annimmt, f/g stetig. Ferner ist für $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion λf stetig. Dieselben Aussagen gelten, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt.*

Zum Beweis benötigen wir zuerst ein einfaches Lemma.

Lemma I.3.5 *Es sei T ein topologischer Raum, und es sei $f\colon T \to \mathbb{R}^n$, $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$, eine Abbildung. Dann ist f genau dann stetig, wenn alle Funktionen $f_1, \dots, f_n$ es sind. Dieselbe Aussage gilt für $\mathbb{C}^n$-wertige Abbildungen.*

Beweis. Da die $p_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$, stetig sind, folgt die Stetigkeit von $f_k = p_k \circ f$ aus der von f. Sei nun $t \in T$ und V eine Umgebung von $f(t)$. Ohne Einschränkung ist V von der Form

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x_k - f_k(t)| < \varepsilon,\ k = 1, \dots, n\}.$$

Sind die f_k stetig, so ist $U_k = f_k^{-1}(\{y \in \mathbb{R}\colon |y - f_k(t)| < \varepsilon\})$ eine Umgebung von t, daher auch $U := U_1 \cap \dots \cap U_n$. Aber es ist $U = f^{-1}(V)$, und das Lemma ist bewiesen. □

Beweis von Satz I.3.4. Sind f und g stetig, so ist nach Lemma I.3.5 $F\colon T \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (f(t), g(t))$, stetig. Da ferner die Abbildung add: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$, stetig ist, ist auch add $\circ F = f + g$ stetig. Genauso argumentiert man in den übrigen Fällen; bei der Division benutzt man die Stetigkeit von div: $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $(x, y) \mapsto x/y$. □

Definition I.3.6 Eine bijektive Abbildung f zwischen topologischen Räumen heißt *Homöomorphismus*, wenn f und f^{-1} stetig sind. Existiert ein Homöomorphismus zwischen T_1 und T_2, so heißen T_1 und T_2 *homöomorph*.

Zum Beispiel ist arctan: $\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ ein Homöomorphismus. Damit ist $\mathbb{R}$ zum offenen Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ und deshalb (sic!) zu jedem offenen Intervall (a, b) homöomorph.

Ist $f\colon T_1 \to T_2$ ein Homöomorphismus, so ist nach Definition eine Teilmenge $O \subset T_1$ genau dann offen, wenn $f(O) = (f^{-1})^{-1}(O) \subset T_2$ offen ist. Vom topologischen Standpunkt sind die beiden Räume dann nicht zu unterscheiden.

Beispiel. (e) Hier ein weniger offensichtliches Beispiel eines Homöomorphismus. Wir beschreiben zuerst die Konstruktion der *Cantormenge* $C \subset [0,1]$: Aus $[0,1]$ entferne das offene mittlere Drittel $O_1 := (1/3, 2/3)$. Aus den beiden Restintervallen entferne wiederum die offenen mittleren Drittel $O_2 := (1/9, 2/9)$ und $O_3 := (7/9, 8/9)$. Aus den noch verbliebenen Restintervallen werden wieder die mittleren Drittel $O_4, \dots, O_7$ entfernt etc. Was übrig bleibt, ist die Cantormenge C:

$$C := [0,1] \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} O_j.$$

Scharfes Hinsehen zeigt, dass C genau aus den Zahlen in $[0,1]$ besteht, die in der Entwicklung im Dreiersystem ohne die Ziffer 1 geschrieben werden können, etwa $1/3 = 0.022222\dots$; mit anderen Worten ist die Abbildung

$$f\colon \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to C, \quad (a_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$$

surjektiv. Sie ist auch injektiv. Es seien nämlich $a = (a_n)$ und $b = (b_n)$ zwei verschiedene Elemente von $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$, und es sei N der kleinste Index, für den $a_N \neq b_N$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\geq 2 \cdot 3^{-N} - \sum_{k>N} |b_k - a_k| 3^{-k} \\ &\geq 2 \cdot 3^{-N} - 2 \sum_{k>N} 3^{-k} = 3^{-N} > 0. \end{aligned} \tag{I.4}$$

Wir zeigen, dass f und f^{-1} stetig sind, wenn $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ die Topologie der punktweisen Konvergenz trägt. Seien dazu zunächst $a \in \{0,2\}^{\mathbb{N}}$ und $\varepsilon > 0$. Ist $3^{-m} < \varepsilon$ und $a_n = b_n$ für $n = 1, \dots, m$, so folgt

$$|f(b) - f(a)| \leq \sum_{k>m} 2 \cdot 3^{-k} = 3^{-m} < \varepsilon.$$

Da diese b nach Definition der Topologie von $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ eine offene Umgebung von a bilden (nämlich $U_{\{1,\dots,m\},1}(a)$ in der Notation von Beispiel I.2(f)), zeigt das die

Stetigkeit von f bei a. Schließlich sei U eine offene Umgebung von a der Form $U_{\{1,\dots,r\},1}(a)$; solche Umgebungen bilden eine Umgebungsbasis von a. Erfüllt $x = f(b)$ die Abschätzung $|x - f(a)| < 3^{-r}$, so zeigt die gleiche Rechnung wie in (I.4) $b = f^{-1}(x) \in U$. Das begründet die Stetigkeit von f^{-1}, und damit ist bewiesen, dass C und $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ homöomorph sind.

I.4 Konvergenz

Nach den bisherigen Erfahrungen ist es leicht, den Begriff der konvergenten Folge von metrischen Räumen auf topologische Räume auszudehnen.

Definition I.4.1 Eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem topologischen Raum T *konvergiert* gegen $t \in T$, wenn für jede Umgebung U von t ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $t_n \in U$ für alle $n \geq n_0$ existiert. Man schreibt $t_n \to t$.

Wieder reicht es, die Umgebungen U eine Umgebungsbasis von t durchlaufen zu lassen.

Im Unterschied zum metrischen Fall braucht der Limes einer konvergenten Folge in einem topologischen Raum nicht eindeutig bestimmt zu sein; trägt nämlich zum Beispiel T die indiskrete Topologie, so konvergiert jede Folge gegen jedes Element von T. Offenbar wird diese Pathologie durch den evidenten Mangel an offenen Mengen der indiskreten Topologie hervorgerufen. In der folgenden Definition führen wir eine wichtige Reichhaltigkeitsbedingung ein, die derlei ausschließt.

Definition I.4.2 Ein topologischer Raum heißt *Hausdorffraum*, falls zu verschiedenen Punkten disjunkte Umgebungen existieren.

Beispiele. (a) Jeder metrische Raum (T, d) ist ein Hausdorffraum. Zu $t_1 \neq t_2$ betrachte nämlich $U = \{t\colon d(t, t_1) < \varepsilon\}$ und $V = \{t\colon d(t, t_2) < \varepsilon\}$ für $\varepsilon = d(t_1, t_2)/2 > 0$; dann ist nach der Dreiecksungleichung $U \cap V = \emptyset$.

(b) Weder ein indiskret topologisierter Raum mit mindestens zwei Elementen noch der Sierpiński-Raum aus Beispiel I.2(d) sind Hausdorffräume.

(c) Sei S eine Menge; $\mathbb{R}^S$ ist dann mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ein Hausdorffraum. Seien nämlich $f_1 \neq f_2$ Funktionen von S nach $\mathbb{R}$. Dann existiert eine Stelle s mit $f_1(s) \neq f_2(s)$. Setze $\varepsilon = \frac{1}{2}|f_1(s) - f_2(s)|$; dann sind $U_{\{s\},\varepsilon}(f_1)$ und $U_{\{s\},\varepsilon}(f_2)$ disjunkte Umgebungen von f_1 und f_2.

Lemma I.4.3 *Ist T ein Hausdorffraum, so ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt.*

Beweis. Gelte $t_n \to s$ und $t_n \to t$. Wäre $s \neq t$, gäbe es disjunkte Umgebungen U von s und V von t. Aber $t_n \to s$ impliziert die Existenz einer natürlichen Zahl n_1 mit $t_n \in U$ für $n \geq n_1$, und wegen $t_n \to t$ folgt die Existenz einer natürlichen Zahl n_2 mit $t_n \in V$ für $n \geq n_2$. Für $n = \max\{n_1, n_2\}$ ergibt sich daraus $t_n \in U \cap V$, also der Widerspruch $U \cap V \neq \emptyset$. □

In metrischen Räumen gelingt es bekanntlich, Begriffe wie Abgeschlossenheit und Stetigkeit äquivalent durch Folgen auszudrücken. Zum Beispiel gilt:

- *Ist T ein metrischer Raum und $M \subset T$, so sind für einen Punkt t äquivalent:*
  (i) $t \in \overline{M}$.
  (ii) *Es existiert eine Folge (t_n) in M mit $t_n \to t$.*

In topologischen Räumen gilt zwar immer noch die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) (Beweis?), aber (i) $\Rightarrow$ (ii) ist im allgemeinen falsch. Dazu betrachte folgendes Gegenbeispiel. Sei $T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, versehen mit der Topologie τ_p der punktweisen Konvergenz. Wir überlegen zuerst, dass eine Folge in dieser Topologie genau dann gegen f konvergiert, wenn sie punktweise konvergiert, d.h. wenn

$$f_n(t) \to f(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{I.5}$$

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist klar, da für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Menge $\{g\colon |g(t) - f(t)| < \varepsilon\}$ eine τ_p-Umgebung von f ist. Gilt umgekehrt (I.5) und ist U eine τ_p-Umgebung von f, die ohne Einschränkung von der Gestalt

$$U = \{g\colon |g(t_k) - f(t_k)| < \varepsilon,\ k = 1, \dots, m\}$$

ist, so ist klar, dass (I.5) $f_n \in U$ für alle hinreichend großen n impliziert. (Die Topologie der punktweisen Konvergenz trägt also ihren Namen zu Recht.)

Für das angekündigte Gegenbeispiel definiere jetzt $M \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ als die Menge aller Indikatorfunktionen von höchstens abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$; mit anderen Worten gehört f zu M, falls es eine höchstens abzählbare Menge B mit

$$f(t) = \chi_B(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in B, \\ 0 & \text{für } t \notin B \end{cases}$$

gibt. Die konstante Funktion $\mathbf{1}$ liegt dann im Abschluss von M, denn ist $U_{F,\varepsilon}(\mathbf{1})$ eine typische Umgebung von $\mathbf{1}$, so gilt ja $\chi_F \in M \cap U_{F,\varepsilon}(\mathbf{1})$, und Lemma I.2.5 liefert $\mathbf{1} \in \overline{M}$. Ist andererseits (χ_{B_n}) eine Folge in M, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiert, so ist $\{t\colon f(t) \neq 0\}$ höchstens abzählbar; da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, kann keine Folge in M bzgl. τ_p gegen $\mathbf{1}$ konvergieren.

Analysiert man den Beweis von (i) $\Rightarrow$ (ii) im metrischen Fall, so stellt man fest, dass die konstruierte Folge (t_n) „eigentlich“ nicht mit $\mathbb{N}$, sondern mit einer Umgebungsbasis von t indiziert ist, denn man wählt ja $t_n \in M \cap U_{1/n}(t)$. Das suggeriert, in topologischen Räumen mit komplizierterer Umgebungsstruktur einen allgemeineren Konvergenzbegriff zu studieren. Die mengentheoretische

Topologie kennt hier die Filterkonvergenz und die Netzkonvergenz. Beide Konzepte sind äquivalent; da jedoch die Netzkonvergenz einfacher zu erklären ist und den Bedürfnissen der Analysis angepasster erscheint, soll nur auf diese eingegangen werden.

Definition I.4.4

(a) Eine *gerichtete Menge* ist eine mit einer Relation $\leq$ versehene Menge I, welche
  (1) $i \leq i \ \forall i \in I$,
  (2) $i \leq j,\ j \leq k \Rightarrow i \leq k \ \forall i, j, k \in I$,
  (3) $\forall i_1, i_2 \in I \ \exists j \in I \quad i_1 \leq j,\ i_2 \leq j$
  erfüllt.

(b) Ein *Netz* in einer Menge T ist eine Abbildung von einer gerichteten Menge I nach T; man schreibt $(t_i)_{i\in I}$ oder kürzer (t_i).

(c) Ein Netz $(t_i)_{i\in I}$ in einem topologischen Raum T *konvergiert* gegen $t \in T$, wenn es für jede Umgebung U von t (oder auch bloß für jede Umgebung in einer Umgebungsbasis von t) ein $i_0 \in I$ mit $t_i \in U$ für alle $i \geq i_0$ existiert. Bezeichnung: $t_i \to t$.

Beispiele. (d) Da $\mathbb{N}$ mit der natürlichen Ordnung eine gerichtete Menge ist, ist jede Folge ein Netz. Definition I.4.4(c) verallgemeinert offensichtlich Definition I.4.1.

(e) Seien T ein topologischer Raum, $t \in T$ und $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis von t. $\mathfrak{U}$ wird durch

$$U \leq V \iff U \supset V$$

eine gerichtete Menge; (3) ist erfüllt, da der Schnitt zweier Umgebungen eine Umgebung ist und deshalb ein Mitglied von $\mathfrak{U}$ umfasst. Wählt man zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ ein Element $t_U \in U$ (das Auswahlaxiom gewährleistet dies), so hat man ein Netz (t_U) definiert. Nach Konstruktion gilt $t_U \to t$.

(f) Sei I die Menge aller Paare (Z, B), wobei Z eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ mit endlich vielen Teilpunkten $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und B eine Belegung $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ mit $x_{j-1} \leq \xi_j \leq x_j$ ist. Setzt man $(Z_1, B_1) \leq (Z_2, B_2)$, falls $Z_1 \subset Z_2$, so wird I zu einer gerichteten Menge. Sei nun $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Definiere $J_{(Z,B)}$ als die Riemann-Summe

$$J_{(Z,B)} = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}).$$

Das ist ein Netz in $\mathbb{R}$. Nach einem Satz aus der Analysisvorlesung gilt $J_{(Z,B)} \to \int_a^b f(x)\,dx$.

Mit Netzen kann man (fast) genauso hantieren wie mit Folgen; es sei jedoch darauf hingewiesen, dass ein konvergentes Netz in $\mathbb{R}$ unbeschränkt sein kann, etwa $(t_i) = (1/i)$ mit $i \in I = (0, \infty)$ und der üblichen Ordnung $\leq$.

Nun beweisen wir das Lemma I.4.3 für Netze.

Lemma I.4.5 *Ist T ein Hausdorffraum, so ist der Grenzwert eines konvergenten Netzes eindeutig bestimmt.*

Beweis. Der Beweis ist fast wörtlich derselbe wie bei Lemma I.4.3. Gelte also $t_i \to s$ und $t_i \to t$ mit $s \neq t$; wähle dann disjunkte Umgebungen U von s und V von t. Wegen $t_i \to s$ und $t_i \to t$ gelten

$$\begin{aligned} &\exists i_1\ \forall i \geq i_1 \quad t_i \in U, \\ &\exists i_2\ \forall i \geq i_2 \quad t_i \in V. \end{aligned}$$

Mit Bedingung (3) aus Definition I.4.4(a) wähle $j \in I$ mit $j \geq i_1$, $j \geq i_2$. Es folgt $t_j \in U \cap V$ im Widerspruch zu $U \cap V = \emptyset$. □

Mit Hilfe von Netzen kann jetzt der Abschluss einer Menge in einem topologischen Raum adäquat beschrieben werden.

Satz I.4.6 *Ist T ein topologischer Raum und $M \subset T$, so sind für einen Punkt t äquivalent:*

(i) $t \in \overline{M}$.

(ii) *Es existiert ein Netz (t_i) in M mit $t_i \to t$.*

Beweis. (ii) ⇒ (i) folgt sofort aus Lemma I.2.5 und der Definition der Konvergenz.

(i) ⇒ (ii): Sei $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis von t. Für alle $U \in \mathfrak{U}$ existiert ein Punkt $t_U \in U \cap M$ (Lemma I.2.5). Wie in Beispiel I.4(e) beobachtet, konvergiert das Netz (t_U) gegen t. □

Satz I.4.7 *Ist T ein topologischer Raum und $A \subset T$, so sind äquivalent:*

(i) *A ist abgeschlossen.*

(ii) *Ist (t_i) ein Netz in A mit $t_i \to t \in T$, so gilt $t \in A$.*

Beweis. (i) ⇒ (ii): Nach Satz I.4.6 gilt $t \in \overline{A} = A$.

(ii) ⇒ (i): Wir zeigen $\overline{A} \subset A$. Ist $t \in \overline{A}$, so existiert nach Satz I.4.6 ein Netz (t_i) in A mit $t_i \to t$. Wegen (ii) ist $t \in A$. □

Als nächstes versuchen wir, die Stetigkeit von Abbildungen durch Konvergenzphänomene zu beschreiben. Zuerst zum metrischen Fall. Ist $f\colon T_1 \to T_2$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen, so sind bekanntlich äquivalent:

(i) f ist stetig bei t_0.

(ii) Für alle Folgen (t_n) gilt: $t_n \to t_0 \Rightarrow f(t_n) \to f(t_0)$.

Im Fall topologischer Räume braucht die Implikation (ii) ⇒ (i) nicht mehr zu gelten. Als Gegenbeispiel betrachte wieder $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz und die Menge $M = \{\chi_B\colon B \text{ höchstens abzählbar}\}$ wie oben. Wir versehen $S = M \cup \{\mathbf{1}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Relativtopologie. Wir haben bereits

$\mathbf{1} \in \overline{M}$ gezeigt, d.h. M liegt dicht in S. Nun sei $\varphi\colon S \to \mathbb{R}$ durch $\varphi|_M = 0$ und $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ definiert. Wegen $\varphi^{-1}((0,2)) = \{\mathbf{1}\}$, was keine Umgebung von $\mathbf{1}$ ist, ist φ nicht stetig bei $\mathbf{1}$. Ist aber (f_n) eine Folge in S mit $f_n \to \mathbf{1}$, so wurde oben gezeigt, dass nur endlich viele $f_n \in M$ sein können. Also ist (ii) erfüllt.

Wieder bekommt man einen allgemein gültigen Satz, wenn man mit Netzen arbeitet.

Satz I.4.8 *Ist $f\colon T_1 \to T_2$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen, so sind äquivalent:*

(i) *f ist stetig bei t_0.*

(ii) *Für alle Netze (t_i) gilt: $t_i \to t_0 \Rightarrow f(t_i) \to f(t_0)$.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei f stetig bei t_0 und gelte $t_i \to t_0$. Sei V eine Umgebung von $f(t_0)$. Da $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von t_0 ist, existiert ein i_0 mit $t_i \in f^{-1}(V)$ für $i \geq i_0$, das heißt $f(t_i) \in V$ für $i \geq i_0$. Es folgt $f(t_i) \to f(t_0)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wir nehmen an, f sei unstetig bei t_0. Dann existiert eine Umgebung V von $f(t_0)$, so dass $f^{-1}(V)$ keine Umgebung von t_0 ist. Sei $\mathfrak{U}$ eine Umgebungsbasis von t_0. Für kein $U \in \mathfrak{U}$ gilt also $f(U) \subset V$; zu jedem $U \in \mathfrak{U}$ existiert also ein $t_U \in U$ mit $f(t_U) \notin V$. Daher konvergiert das Netz (t_U) gegen t_0, aber $(f(t_U))$ konvergiert nicht gegen $f(t_0)$. $\square$

I.5 Kompakte Räume

Ein für die Analysis zentraler topologischer Begriff ist die Kompaktheit, da sich in kompakten topologischen Räumen häufig elegant Existenzaussagen beweisen lassen.

Definition I.5.1 Ein topologischer Raum T heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Ausführlich bedeutet das:

- Sei I eine Indexmenge, und seien O_i, $i \in I$, offene Teilmengen von T mit $\bigcup_{i \in I} O_i = T$. Dann existieren endlich viele $O_{i_1}, \dots, O_{i_n}$ mit $\bigcup_{k=1}^n O_{i_k} = T$.

Achtung: Manche Autoren nennen diese Eigenschaft *quasikompakt* und fordern zur Kompaktheit zusätzlich die Hausdorffeigenschaft.

Definition I.5.2 Ist T ein topologischer Raum und $S \subset T$, so heißt S kompakt, wenn S in der Relativtopologie kompakt ist. S heißt relativkompakt, wenn $\overline{S}$ kompakt ist.

Den ersten Teil dieser Definition kann man äquivalent so umschreiben:

- Sei I eine Indexmenge, und seien O_i, $i \in I$, offene Teilmengen von T mit $S \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Dann existieren endlich viele $O_{i_1}, \dots, O_{i_n}$ mit $S \subset \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}$.

Die $O_i' = O_i \cap S$ bilden nämlich eine offene Überdeckung (bzgl. der Relativtopologie) von S im Sinn von Definition I.5.1.

Aus der Definition I.5.2 ergibt sich, dass der Begriff der Kompaktheit eines Teilraums $S \subset T$ – anders als bei der Offenheit und der Abgeschlossenheit – unabhängig vom Oberraum T ist. Auch die Relativkompaktheit hängt vom Oberraum ab.

Satz I.5.3

(a) *Ist T ein kompakter topologischer Raum und $S \subset T$ abgeschlossen, so ist S ebenfalls kompakt.*

(b) *Ist T ein Hausdorffraum und $S \subset T$ kompakt, so ist S abgeschlossen in T.*

(c) *Ist T_1 kompakt und $f\colon T_1 \to T_2$ stetig, so ist $f(T_1)$ kompakt.*

(d) *Sind T_1 und T_2 Hausdorffräume, $f\colon T_1 \to T_2$ stetig und bijektiv sowie T_1 kompakt, so ist f^{-1} stetig. Mit anderen Worten sind T_1 und T_2 homöomorph.*

Beweis. (a) Seien O_i, $i \in I$, offene Teilmengen von T und $S \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. Dann bilden die O_i zusammen mit $T \setminus S$ eine offene Überdeckung von T, die nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Also gilt $S \subset \bigcup_{k=1}^n O_{i_k}$ mit geeigneten $O_{i_1}, \dots, O_{i_n}$.

(b) Wir zeigen, dass $T \setminus S$ offen ist. Sei dazu $t \in T \setminus S$; wir werden eine Umgebung V von t mit $V \cap S = \emptyset$ konstruieren. Zu $s \in S$ wähle disjunkte offene Umgebungen U_s von s und V_s von t. Insbesondere gilt $S \subset \bigcup_{s \in S} U_s$, also auch $S \subset \bigcup_{k=1}^n U_{s_k}$ für geeignete $s_1, \dots, s_n$, da S kompakt ist. Wäre $\bigcap_{k=1}^n V_{s_k} \cap S \neq \emptyset$, gäbe es ein $s \in S$ mit $s \in V_{s_k}$ für alle k. Andererseits wäre $s \in U_{s_j}$ für ein j im Widerspruch zu $U_{s_j} \cap V_{s_j} = \emptyset$. Also leistet $V = \bigcap_{k=1}^n V_{s_k}$ das Gewünschte.

(c) Sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(T_1)$. Dann ist $(f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von T_1, die eine endliche Teilüberdeckung $f^{-1}(V_{i_1}), \dots, f^{-1}(V_{i_n})$ besitzt. Also ist $V_{i_1}, \dots, V_{i_n}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(T_1)$, und $f(T_1)$ ist kompakt.

(d) Nach Satz I.3.2(iii) ist zu zeigen, dass für alle abgeschlossenen Mengen $A \subset T_1$ auch $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ in T_2 abgeschlossen ist. Aber solch ein A ist nach (a) kompakt, und nach (c) ist $f(A)$ ebenfalls kompakt. Teil (b) impliziert die Abgeschlossenheit von $f(A)$. □

Da nach dem Satz von Heine-Borel genau die abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ (bzw. $\mathbb{C}^d$) kompakt sind, impliziert Satz I.5.3(c) insbesondere:

- *Ist T kompakt und $f\colon T \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt und nimmt sein Supremum und Infimum an.*

Außerdem kann man Satz I.5.3(b) und (c) gelegentlich benutzen, um die Abgeschlossenheit einer Menge zu zeigen; ein Beispiel findet sich im Beweis von Lemma II.3.18 auf Seite 88.

Im Fall metrischer Räume kann die Kompaktheit äquivalent als *Folgenkompaktheit* beschrieben werden. Im folgenden Satz bleibt im allgemeinen *keine* der Implikationen (i) $\Rightarrow$ (ii) bzw. (ii) $\Rightarrow$ (i) für topologische Räume richtig; Gegenbeispiele folgen auf Seite 29.

Satz I.5.4 *Für einen metrischen Raum (T, d) sind äquivalent:*

(i) *T ist kompakt.*

(ii) *Jede Folge in T hat eine konvergente Teilfolge („T ist folgenkompakt“).*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Falls (t_n) eine Folge ohne konvergente Teilfolge ist, kann kein $t \in T$ Häufungspunkt von (t_n) sein. Für jedes $t \in T$ existiert also $\varepsilon_t > 0$ derart, dass $U_{\varepsilon_t}(t)$ nur endlich viele t_n enthält. Da $T = \bigcup_{t\in T} U_{\varepsilon_t}(t)$ gilt, reichen nach (i) endlich viele der $U_{\varepsilon_t}(t)$ aus, um T zu überdecken. Also enthielte T nur endlich viele der t_n: Widerspruch!

(ii) $\Rightarrow$ (i): Dies ist die schwierigere Implikation. Wir zeigen zuerst:

- *Für alle $\varepsilon > 0$ existieren endlich viele $t_1, \dots, t_N \in T$ mit*

$$T = \bigcup_{k=1}^{N} U_\varepsilon(t_k). \tag{I.6}$$

Wäre dies falsch, gäbe es $\varepsilon > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t_1, \dots, t_n \in T$

$$\bigcup_{k=1}^{n} U_\varepsilon(t_k) \subsetneqq T$$

gilt. Wir werden nun induktiv eine Folge ohne konvergente Teilfolge konstruieren.

Sei $t_1 \in T$ beliebig. Wegen $U_\varepsilon(t_1) \neq T$ existiert $t_2 \in T$ mit $d(t_2, t_1) \geq \varepsilon$. Nun ist auch $U_\varepsilon(t_1) \cup U_\varepsilon(t_2) \neq T$, also existiert $t_3 \in T$ mit $d(t_3, t_k) \geq \varepsilon$ für $k = 1, 2$. So fortfahrend, erhält man eine Folge (t_n) in T, für die $d(t_n, t_k) \geq \varepsilon$ für alle $k < n$ gilt. Es ist klar, dass keine Teilfolge von (t_n) eine Cauchyfolge sein kann; daher enthält (t_n) erst recht keine konvergente Teilfolge.

Damit ist die Hilfsbehauptung gezeigt. Nehmen wir nun an, T sei folgenkompakt und (O_i) sei eine offene Überdeckung, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Sei $\varepsilon_1 = 1$, und wähle $t_1^{(1)}, \dots, t_{N_1}^{(1)}$ gemäß (I.6). Mindestens eine der

Kugeln $U_{\varepsilon_1}(t_k^{(1)})$ kann dann nicht endlich überdeckbar sein, sagen wir $U_{\varepsilon_1}(t_1^{(1)})$. Nun sei $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, und es seien $t_1^{(2)}, \dots, t_{N_2}^{(2)}$ gemäß (I.6) gewählt. Es folgt

$$U_{\varepsilon_1}(t_1^{(1)}) = \bigcup_{k=1}^{N_2} \bigl(U_{\varepsilon_1}(t_1^{(1)}) \cap U_{\varepsilon_2}(t_k^{(2)})\bigr),$$

und eine dieser Mengen, sagen wir $U_{\varepsilon_1}(t_1^{(1)}) \cap U_{\varepsilon_2}(t_1^{(2)})$, kann nicht endlich überdeckbar sein. Nun wenden wir (I.6) mit $\varepsilon_3 = \frac{1}{4}$ an, und wir erhalten einen Punkt $t_1^{(3)}$, so dass

$$U_{\varepsilon_1}(t_1^{(1)}) \cap U_{\varepsilon_2}(t_1^{(2)}) \cap U_{\varepsilon_3}(t_1^{(3)})$$

nicht endlich überdeckbar ist. Nach diesem Schema konstruieren wir mit $\varepsilon_n = 2^{1-n}$ Punkte s_n, so dass $\bigcap_{k=1}^{n} U_{\varepsilon_k}(s_k)$ für kein $n \in \mathbb{N}$ endlich überdeckbar ist. Insbesondere ist stets $U_{\varepsilon_n}(s_n) \cap U_{\varepsilon_{n+1}}(s_{n+1}) \neq \emptyset$.

Betrachte die so entstandene Folge (s_n). Sie ist wegen $d(s_{n+1}, s_n) \leq \varepsilon_n + \varepsilon_{n+1} \leq 2^{2-n}$ eine Cauchyfolge. Andererseits enthält sie nach Voraussetzung (ii) eine konvergente Teilfolge. Deswegen muss sie selbst konvergent sein, etwa $s_n \to s_0$. Wähle i_0 mit $s_0 \in O_{i_0}$. Da O_{i_0} offen ist, ist

$$\eta := \inf\{d(s_0, s) \colon s \notin O_{i_0}\} > 0.$$

Wähle n so groß, dass $d(s_n, s_0) < \eta/2$ und $2^{1-n} < \eta/2$ ausfällt. Dann ist

$$U_{\varepsilon_1}(s_1) \cap \dots \cap U_{\varepsilon_n}(s_n) \subset U_{\varepsilon_n}(s_n) \subset U_\eta(s_0) \subset O_{i_0},$$

also $U_{\varepsilon_1}(s_1) \cap \dots \cap U_{\varepsilon_n}(s_n)$ endlich überdeckbar (nämlich durch ein einziges O_i) im Widerspruch zur Konstruktion der s_n.

Damit ist die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) bewiesen. $\square$

Als Anwendung geben wir ein Kompaktheitskriterium für Räume stetiger Funktionen. Sei S kompakt. Dann ist die Menge $C(S)$ aller reellwertigen Funktionen auf S ein Vektorraum, auf dem

$$\|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)| \ (< \infty!)$$

eine Norm definiert. Wir benutzen, dass $C(S)$ mit der davon abgeleiteten Metrik $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ ein vollständiger metrischer Raum ist (Aufgabe I.9.18 oder Beispiel V.1(c)).

Satz I.5.5 (Satz von Arzelà-Ascoli)
Sei (S, d) ein kompakter metrischer Raum, und sei $M \subset C(S)$, wobei $C(S)$ wie oben mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz versehen wird. Die Teilmenge M habe die Eigenschaften

(a) *M ist beschränkt,*

(b) *M ist abgeschlossen,*

(c) *M ist gleichgradig stetig, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall f \in M \; \forall s, t \in S \qquad d(s,t) \le \delta \quad \Rightarrow \quad |f(s) - f(t)| \le \varepsilon.$$

Dann ist M kompakt.

Beweis. Zuerst wird gezeigt, dass S separabel ist. Da S kompakt ist, besitzt – bei gegebenem $\varepsilon > 0$ – die Überdeckung $\bigcup_{s\in S}\{t \in S\colon d(s,t) < \varepsilon\}$ eine endliche Teilüberdeckung. Es existieren also zu $n \in \mathbb{N}$ endlich viele $s_1^{(n)}, \dots, s_{m_n}^{(n)} \in S$ mit $S = \bigcup_{k=1}^{m_n}\{t \in S\colon d(s_k^{(n)}, t) < \frac{1}{n}\}$. Es folgt, dass die abzählbare Menge $\{s_k^{(n)}\colon 1 \le k \le m_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ dicht liegt.

Nun zum eigentlichen Beweis, der ein Diagonalfolgenargument benutzt. Wir betrachten eine dichte abzählbare Menge $\{s_1, s_2, \dots\} \subset S$ und eine Folge (f_n) in M. Wir zeigen, dass es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge gibt.

Da M beschränkt ist, ist die Folge $\bigl(f_n(s_1)\bigr)$ in $\mathbb{K}$ beschränkt und besitzt daher eine konvergente Teilfolge

$$\bigl(f_{n_1}(s_1), f_{n_2}(s_1), f_{n_3}(s_1), \dots\bigr).$$

Auch die Folge $\bigl(f_{n_i}(s_2)\bigr)$ ist beschränkt, und eine geeignete Teilfolge dieser Folge, etwa

$$\bigl(f_{m_1}(s_2), f_{m_2}(s_2), f_{m_3}(s_2), \dots\bigr)$$

konvergiert. Nochmalige Ausdünnung beschert uns eine konvergente Teilfolge

$$\bigl(f_{p_1}(s_3), f_{p_2}(s_3), f_{p_3}(s_3), \dots\bigr),$$

etc. Die Diagonalfolge $g_1 = f_{n_1}$, $g_2 = f_{m_2}$, $g_3 = f_{p_3}$, $\dots$ hat daher die Eigenschaft

$$\bigl(g_i(s_n)\bigr)_{i\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir werden nun die gleichgradige Stetigkeit benutzen, um die gleichmäßige Konvergenz von $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ zu zeigen. Dazu beweisen wir, dass (g_i) bzgl. der Metrik der Supremumsnorm eine Cauchyfolge bildet.

Sei $\varepsilon > 0$, und wähle $\delta > 0$ gemäß (c). Dann existieren endlich viele offene Kugeln vom Radius $\delta/2$, etwa $U_1, \dots, U_p$, die S überdecken (siehe oben). Jede Kugel enthält dann eines der s_n, sagen wir $s_{n_k} \in U_k$. Nun wähle $i_0 = i_0(\varepsilon)$ mit

$$|g_i(s_{n_k}) - g_j(s_{n_k})| \le \varepsilon \qquad \forall i, j \ge i_0,\ k = 1, \dots, p. \tag{I.7}$$

Jetzt betrachte ein beliebiges $s \in S$; s liegt dann in einer der überdeckenden Kugeln, etwa $s \in U_\kappa$. Es folgt $d(s, s_{n_\kappa}) < \delta$ und daher nach (c)

$$|g_i(s) - g_i(s_{n_\kappa})| \le \varepsilon \qquad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{I.8}$$

Also implizieren (I.7) und (I.8) für $i, j \geq i_0$

$$|g_i(s) - g_j(s)| \leq |g_i(s) - g_i(s_{n_\kappa})| + |g_i(s_{n_\kappa}) - g_j(s_{n_\kappa})| + |g_j(s_{n_\kappa}) - g_j(s)| \leq 3\varepsilon.$$

Das zeigt $\|g_i - g_j\|_\infty \leq 3\varepsilon$ für $i, j \geq i_0$, und (g_i) ist eine Cauchyfolge. Da M abgeschlossen ist, liegt ihr Limes in M, und die Kompaktheit von M ist bewiesen. □

Derselbe Beweis liefert:

- (a) & (c) $\Rightarrow$ M *relativkompakt.*

Zurück zur Kompaktheit in allgemeinen topologischen Räumen. Es sollen verschiedene äquivalente Umformungen des Kompaktheitsbegriffs beschrieben werden. Wie bereits im Zusammenhang mit Satz I.5.4 bemerkt wurde, sind Kompaktheit und Folgenkompaktheit für topologische Räume völlig verschiedene Eigenschaften; Beispiele folgen auf Seite 29. Wieder muss man Netze ins Spiel bringen. Leider ist der adäquate Begriff eines Teilnetzes etwas kompliziert. Sei $(t_i)_{i \in I}$ ein Netz, J eine weitere gerichtete Menge und $\varphi\colon J \to I$ eine Abbildung mit

$$\forall i \in I\ \exists j_0 \in J\ \forall j \geq j_0 \quad \varphi(j) \geq i.$$

Dann heißt $(t_{\varphi(j)})_{j \in J}$ ein *Teilnetz* von $(t_i)_{i \in I}$. Jedes Teilnetz eines konvergenten Netzes konvergiert gegen denselben Grenzwert. Ein Teilnetz eines Netzes (t_i) enthält manche der t_i, diese jedoch eventuell sehr häufig, was das Konzept des Teilnetzes von dem einer Teilfolge unterscheidet. In der Tat werden wir im Beweis von Lemma I.5.6 ein Teilnetz angeben, das jedes der t_i unendlich oft enthält.

Für den folgenden Satz ist noch ein Begriff wichtig. Ein Netz (t_i) liegt *schließlich* in einer Menge $M \subset T$, falls ein $i_0 \in I$ mit $t_i \in M$ für alle $i \geq i_0$ existiert. Ein Netz heißt *universell*, wenn es für alle $M \subset T$ entweder schließlich in M oder schließlich in $T \setminus M$ liegt. Universelle Netze sind schwer zu visualisieren, und tatsächlich ist es noch niemandem gelungen, ein solches (außer den schließlich konstanten Netzen) konkret anzugeben. Mit Hilfe des Zornschen Lemmas kann man aber ihre Existenz beweisen.

Lemma I.5.6 *Jedes Netz besitzt ein universelles Teilnetz.*

Beweis. Sei (t_i) ein Netz in T. Betrachte die „Schwänze" $S_i = \{t_{i'}\colon i' \geq i\}$ sowie $\mathfrak{S} = \{S_i\colon i \in I\}$. Nennt man eine Familie $\mathfrak{F}$ von Teilmengen von T eine *Filterbasis*, falls kein $F \in \mathfrak{F}$ leer ist und zu $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ ein $F \in \mathfrak{F}$ mit $F \subset F_1 \cap F_2$ existiert, so ist $\mathfrak{S}$ eine Filterbasis. Sei X das System aller $\mathfrak{S}$ umfassenden Filterbasen. Bezüglich der Inklusion ist X induktiv geordnet, und das Zornsche Lemma liefert eine maximale Familie $\mathfrak{U} \in \mathsf{X}$; die Maximalität von $\mathfrak{U}$ impliziert insbesondere $T \in \mathfrak{U}$.

Als nächstes beobachten wir, dass $\mathfrak{U}$ die bizarre Eigenschaft zukommt, für jede Teilmenge von T entweder diese selbst oder ihr Komplement zu enthalten. Ist nämlich $M \subset T$, so gilt $M \cap U \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}$ oder $(T \setminus M) \cap U \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}$, denn andernfalls existierten $U, V \in \mathfrak{U}$ mit $M \cap U = \emptyset$ und $(T \setminus M) \cap V = \emptyset$, so dass U und V disjunkt sind im Widerspruch zur Definition von X. Nehmen wir $M \cap U \neq \emptyset$ für alle $U \in \mathfrak{U}$ an, so ist $\mathfrak{U} \cup \{U \cap M \colon U \in \mathfrak{U}\} \in \mathsf{X}$, und wegen der Maximalität von $\mathfrak{U}$ gilt $M = T \cap M \in \mathfrak{U}$. Im verbleibenden Fall erhält man analog $T \setminus M \in \mathfrak{U}$.

Nun versehen wir $\Phi = \{(U, i) \in \mathfrak{U} \times I \colon t_i \in U\}$ mit der Relation $(U, i) \geq (V, j)$, falls $U \subset V$ und $i \geq j$. Φ ist eine gerichtete Menge, denn zu (U_1, i_1), $(U_2, i_2) \in \Phi$ wähle $V \in \mathfrak{U}$ mit $V \subset U_1 \cap U_2$ und $j \in I$ mit $j \geq i_1$, $j \geq i_2$. Da $S_j \in \mathfrak{U}$, ist $S_j \cap V \neq \emptyset$; d.h. es existiert $k \geq j$ mit $t_k \in V$. Also dominiert $(V, k) \in \Phi$ sowohl (U_1, i_1) als auch (U_2, i_2). Mittels $\varphi \colon \Phi \to I$, $(U, i) \mapsto i$, wird ein Teilnetz $(t_{\varphi(U,i)})$ von (t_i) definiert, das nach Konstruktion schließlich in allen $U \in \mathfrak{U}$ verläuft. Die im letzten Absatz gemachte Beobachtung liefert, dass es ein universelles Teilnetz ist. □

Das im vorigen Beweis „konstruierte“ Mengensystem $\mathfrak{U}$ ist ein Beispiel eines *Ultrafilters.*

Satz I.5.7 *Für einen topologischen Raum T sind äquivalent:*

(i) *T ist kompakt.*

(ii) *T hat die endliche Durchschnittseigenschaft, d.h., sind A_i $(i \in I)$ abgeschlossene Teilmengen von T mit $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$, so existieren endliche viele Indizes $i_1, \dots, i_n$ mit $\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k} = \emptyset$.*

(iii) *Jedes universelle Netz in T konvergiert.*

(iv) *Jedes Netz in T hat ein konvergentes Teilnetz.*

Beweis. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) folgt sofort durch Komplementbildung.

(i) $\Rightarrow$ (iii): Wir nehmen an, es existiere ein nicht konvergentes universelles Netz (t_i). Für alle $t \in T$ gibt es dann eine offene Umgebung U_t, so dass (t_i) nicht schließlich in U_t liegt; weil das Netz universell ist, muss (t_i) schließlich in $T \setminus U_t$ liegen. Wählt man eine endliche Teilüberdeckung $U_{t_1} \cup \dots \cup U_{t_n}$ der offenen Überdeckung $\bigcup_{t \in T} U_t$, erhält man den Widerspruch, dass (t_i) schließlich in $(T \setminus U_{t_1}) \cap \dots \cap (T \setminus U_{t_n}) = \emptyset$ liegt.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) ist klar nach Lemma I.5.6.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Nehmen wir an, (iv) gelte, aber T sei nicht kompakt. Dann existiert eine offene Überdeckung $\bigcup_{i \in I} U_i$, die keine endliche Teilüberdeckung zulässt. Bezeichnet Φ die Menge der endlichen Teilmengen von I, so existiert also zu jedem $F \in \Phi$ ein $t_F \in T \setminus \bigcup_{i \in F} U_i$. Da Φ in natürlicher Weise eine gerichtete Menge ist, haben wir so ein Netz definiert. Wäre $(t_{\varphi(j)})_{j \in J}$ ein konvergentes

Teilnetz, so existierte ein Grenzwert t und weiter ein Index i mit $t \in U_i$. Aber $t_{\varphi(j)} \notin U_i$, falls $\varphi(j) \geq \{i\}$, im Widerspruch zur angenommenen Konvergenz. □

Die wohl wichtigste Stabilitätsaussage über kompakte Räume ist der Satz von Tikhonov. Um ihn zu formulieren, brauchen wir das Konzept der *Produkttopologie*. Es sei A eine Indexmenge, und T_α sei für jedes $\alpha \in \mathsf{A}$ ein topologischer Raum. Das mengentheoretische Produkt der T_α ist

$$\prod_{\alpha \in \mathsf{A}} T_\alpha = \{f\colon \mathsf{A} \to \bigcup T_\alpha\colon\ f(\alpha) \in T_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathsf{A}\}\,.$$

Stimmen alle T_α überein, sagen wir $T_\alpha = T$, schreibt man auch T^{A}; T^{A} besteht also aus allen Funktionen von A nach T. Das Auswahlaxiom impliziert, dass $\prod T_\alpha$ nicht leer ist. Nun beschreiben wir die Produkttopologie. Eine Teilmenge $O \subset \prod T_\alpha$ heißt offen (in der Produkttopologie), wenn es für alle $t \in O$ endlich viele Indizes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ und in T_{α_j} offene Mengen O_{α_j} $(j = 1, \dots, k)$ mit

$$t \in \Bigl\{s \in \prod T_\alpha\colon s(\alpha_j) \in O_{\alpha_j}\ \forall j = 1, \dots, k\Bigr\} \subset O$$

gibt. (Mit anderen Worten haben wir so eine Umgebungsbasis von t beschrieben; siehe Satz I.2.7.) Für $\mathsf{A} = \mathbb{R}$ und $T_\alpha = \mathbb{R}$ für alle α stimmt die Produkttopologie von $\prod T_\alpha$ nach Konstruktion mit der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ überein.

Die Produkttopologie hat folgende Eigenschaften.

Lemma I.5.8 *Bezeichnet π_β die kanonische Abbildung $\prod T_\alpha \to T_\beta$, $t \mapsto t(\beta)$, so ist eine Abbildung $f\colon S \to \prod T_\alpha$ (S ein topologischer Raum) genau dann stetig, wenn es alle $\pi_\beta \circ f\colon S \to T_\beta$ sind, und ein Netz $(t_i)_{i\in I}$ konvergiert genau dann in $\prod T_\alpha$ gegen t, wenn alle $\bigl(\pi_\beta(t_i)\bigr)_{i\in I}$ in T_β gegen $\pi_\beta(t)$ konvergieren.*

Beweis. Nach Konstruktion der Produkttopologie sind alle π_β stetig; daher gelten für alle β nach Satz I.3.3(a) und Satz I.4.8

$$\begin{aligned} f \text{ stetig} &\Rightarrow \pi_\beta \circ f \text{ stetig},\\ t_i \to t &\Rightarrow \pi_\beta(t_i) \to \pi_\beta(t). \end{aligned}$$

Sind alle $\pi_\beta \circ f$ stetig und ist V eine Umgebung von $f(s)$, so existieren nach Definition der Produkttopologie endlich viele $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ und offene Mengen $O_{\alpha_1}, \dots, O_{\alpha_r}$ in $T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_r}$ mit

$$f(s) \in \{t\colon t(\alpha_j) \in O_{\alpha_j},\ j = 1, \dots, r\} \subset V,$$

d.h.

$$\pi_{\alpha_j}(f(s)) \in O_{\alpha_j} \qquad \forall j = 1, \dots, r,$$

also

$$s \in \bigcap_{j=1}^{r} (\pi_{\alpha_j} \circ f)^{-1}(O_{\alpha_j}) =: U.$$

Nun ist die Menge U nach Annahme offen, und es gilt $U \subset f^{-1}(V)$. Daher ist f stetig bei s.

Schließlich gelte $\pi_\beta(t_i) \to \pi_\beta(t)$ für ein Netz (t_i) und alle β. Sei V eine Umgebung von t; wie oben existieren dann offene Mengen $O_{\alpha_j} \subset T_{\alpha_j}$, $j = 1, \dots, r$, mit

$$t \in \{t' \colon t'(\alpha_j) \in O_{\alpha_j},\ j = 1, \dots, r\} \subset V.$$

Wegen $\pi_{\alpha_j}(t_i) \to \pi_{\alpha_j}(t)$ existieren Indizes $i_1, \dots, i_r$ mit

$$i \geq i_j \Rightarrow \pi_{\alpha_j}(t_i) \in O_{\alpha_j}.$$

Nach Definition einer gerichteten Menge existiert ein Index i' mit $i' \geq i_j$ für $j = 1, \dots, r$ und deshalb

$$i \geq i' \Rightarrow t_i \in V.$$

Daher gilt $t_i \to t$. □

Die Produkttopologie ist also stets die Topologie der punktweisen (oder koordinatenweisen) Konvergenz.

Nun können wir den fundamentalen Satz von Tikhonov formulieren und beweisen.

Theorem I.5.9 (Satz von Tikhonov)
Das Produkt $\prod T_\alpha$ kompakter Räume ist kompakt.

Beweis. Der Beweis kann schnell mit Hilfe von Satz I.5.7 geführt werden. Sei $(t_i)_{i \in I}$ ein universelles Netz in $\prod T_\alpha$. Für jedes $\alpha \in \mathsf{A}$ ist dann $\bigl(\pi_\alpha(t_i)\bigr)_{i \in I}$ ein universelles Netz in T_α, also nach Satz I.5.7 konvergent. Gemäß Lemma I.5.8 ist $(t_i)_{i \in I}$ selbst konvergent. Eine nochmalige Anwendung von Satz I.5.7 liefert die Behauptung des Theorems. □

Jetzt sind wir in der Lage, die oben versprochenen Gegenbeispiele zu formulieren.

• Ein folgenkompakter Raum, der nicht kompakt ist:

Sei wie auf Seite 18 $M \subset \mathbb{R}^\mathbb{R}$ die Menge aller Indikatorfunktionen χ_B mit höchstens abzählbaren Mengen B. Wie auf Seite 18 sieht man, dass M in $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, also der Produkttopologie, nicht abgeschlossen ist, denn $\mathbf{1} \in \overline{M} \setminus M$; insbesondere ist M nicht kompakt (Satz I.5.3(b)). Ist (χ_{B_n}) eine Folge in M, so ist $\bigcup_n B_n$ höchstens abzählbar, und mit Hilfe eines Diagonalfolgenarguments zeigt man die Existenz einer punktweise konvergenten Teilfolge, etwa mit Grenzwert f. Es ist klar, dass f selbst eine Indikatorfunktion χ_B und B höchstens abzählbar ist, d.h. $\chi_B \in M$. Deshalb ist M folgenkompakt.

• Ein kompakter Raum, der nicht folgenkompakt ist:

Sei $S = \{(s_n) \colon 0 \leq s_n \leq 1\ \forall n\}$ die Menge aller Folgen in $[0, 1]$. Dann ist $T := [0, 1]^S$ in der Produkttopologie nach dem Satz von Tikhonov kompakt.

Betrachte nun zu $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f_k\colon S \to [0,1]$, $(s_n) \mapsto s_k$. Dann hat die Folge (f_k) in T keine konvergente Teilfolge. Wäre nämlich (f_{k_j}) eine solche, so wäre für alle $s \in S$ die Folge $(f_{k_j}(s)) = (s_{k_j})$ konvergent (warum?). Das stimmt aber nicht, wie man an der Folge s mit $s_n = 1$ für $n = k_{2j}$, $s_n = 0$ sonst, sieht.

I.6 Zusammenhängende Räume

Während der topologische Raum $\mathbb{R}$ „aus einem Stück" zu bestehen scheint, ist $[0,1] \cup [2,3]$ „unzusammenhängend". Das soll im folgenden präzisiert werden.

Definition I.6.1 Ein topologischer Raum T heißt *unzusammenhängend*, wenn es nichtleere offene disjunkte Teilmengen O_1, O_2 von T mit $T = O_1 \cup O_2$ gibt. Andernfalls heißt T *zusammenhängend*. Eine Teilmenge von T heißt zusammenhängend, wenn sie in der Relativtopologie einen zusammenhängenden topologischen Raum bildet.

Ist T unzusammenhängend mit $T = O_1 \cup O_2$ wie oben, so ist O_1 nicht nur offen, sondern als Komplement der offenen Menge O_2 auch abgeschlossen[5]. Der Raum T ist also genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und T die einzigen Teilmengen sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Offensichtlich ist $M \subset T$ genau dann unzusammenhängend, wenn es offene Teilmengen O_1, O_2 von T mit $O_1 \cap M \neq \emptyset$, $O_2 \cap M \neq \emptyset$, $(O_1 \cap M) \cap (O_2 \cap M) = \emptyset$ und $M \subset O_1 \cup O_2$ gibt.

Beispiele. (a) Jeder indiskret topologisierte Raum ist zusammenhängend (klar), auch der Sierpiński-Raum aus Beispiel I.2(d) ist zusammenhängend (auch klar).

(b) Das zu Beginn des Abschnitts angedeutete Beispiel $M = [0,1] \cup [2,3]$ ist wirklich unzusammenhängend im Sinn der obigen Definition. Auch $\mathbb{Q}$ ist unzusammenhängend, da $\mathbb{Q} = \{t \in \mathbb{Q}\colon t^2 < 2\} \cup \{t \in \mathbb{Q}\colon t^2 > 2\}$ ist und diese beiden Mengen relativ offen sind.

(c) Jedes Teilintervall I von $\mathbb{R}$ ist zusammenhängend. Zum Beweis dieser Aussage nehme man das Gegenteil an; es existieren dann offene Teilmenge $O_1, O_2 \subset \mathbb{R}$ mit $I \subset O_1 \cup O_2$, $(O_1 \cap I) \cap (O_2 \cap I) = \emptyset$ und $O_1 \cap I \neq \emptyset$, $O_2 \cap I \neq \emptyset$. Wähle $\alpha \in O_1 \cap I$, $\beta \in O_2 \cap I$, wobei ohne Einschränkung $\alpha < \beta$ sei. Da I ein Intervall ist, ist $(\alpha, \beta) \subset I$. Betrachte nun

$$\gamma = \sup\{t \in (\alpha, \beta)\colon (\alpha, t] \subset O_1\}.$$

(Da O_1 offen und $\alpha \in O_1$ ist, gibt es solche t.) Weil $O_1 \cap I$ relativ abgeschlossen ist, gilt $(\alpha, \gamma] \subset O_1$, und es ist $\gamma < \beta$, weil $O_1 \cap I$ und $O_2 \cap I$ disjunkt sind. Wiederum wegen der Offenheit von O_1 existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $[\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon] \subset O_1$; also folgt $(\alpha, \gamma + \varepsilon] \subset O_1$ im Widerspruch zur Wahl von γ.

[5] Im Englischen nennt man solche Mengen *clopen*; die entsprechende Wortschöpfung *abgeschloffen* ist im Deutschen jedoch nicht gebräuchlich.

Umgekehrt ist jede zusammenhängende nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ ein Intervall. Sei dazu $a = \inf M$, $b = \sup M$. Wir werden $(a, b) \subset M$ zeigen, was die Behauptung impliziert: Gäbe es ein $c \in (a, b) \setminus M$, wäre ja

$$M = \{t \in M\colon t < c\} \cup \{t \in M\colon t > c\}$$

eine nichttriviale Zerlegung von M in disjunkte relativ offene Teilmengen.

(d) Um zu zeigen, dass $\mathbb{R}^d$ zusammenhängend ist, benötigen wir ein einfaches Lemma.

Lemma I.6.2 *Sei T ein topologischer Raum, und seien T_i, $i \in I$, zusammenhängende Teilräume mit $T = \bigcup_{i \in I} T_i$, $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ für $i \neq j$. Dann ist T zusammenhängend.*

Beweis. Seien O_1 und O_2 offene disjunkte Teilmenge von T mit $T = O_1 \cup O_2$. Wir zeigen, dass O_1 oder O_2 leer ist. Wegen $T_i = (O_1 \cap T_i) \cup (O_2 \cap T_i)$ gilt für jedes i entweder $T_i \subset O_1$ oder $T_i \subset O_2$. Aber es kann keine zwei Indizes $i \neq j$ mit $T_i \subset O_1$ und $T_j \subset O_2$ geben, da $T_i \cap T_j \neq \emptyset$. Also haben wir für alle $i \in I$ (ohne Einschränkung) $T_i \subset O_1$, d.h. $T \subset O_1$ und $O_2 = \emptyset$. □

Nun wenden wir Lemma I.6.2 mit $T = \mathbb{R}^d$, $I = \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x\| = 1\}$ und $T_x = \{\lambda x\colon \lambda \in \mathbb{R}\}$ an. Jedes T_x ist homöomorph zu $\mathbb{R}$ ($\lambda \mapsto \lambda x$ ist der kanonische Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ auf T_x) und deshalb zusammenhängend (Beispiel I.6(c)); beachte noch $0 \in T_x \cap T_y$.

Im Kontext des letzten Arguments ist folgende Bemerkung wichtig und eigentlich überfällig: Alle bisher betrachteten topologischen Begriffe sind invariant unter Homöomorphie; ist also S homöomorph zu T und ist S zusammenhängend bzw. kompakt bzw. ein Hausdorffraum, so ist auch T zusammenhängend bzw. kompakt bzw. ein Hausdorffraum. Wären die topologischen Begriffe nicht homöomorphieinvariant, wären es keine sinnvollen Begriffe!

Wegen Beispiel I.6(c) ist der folgende Satz eine abstrakte Version des Zwischenwertsatzes.

Satz I.6.3 *Ist T_1 zusammenhängend und $f\colon T_1 \to T_2$ stetig, so ist auch $f(T_1)$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien $O_1, O_2 \subset T_2$ offen mit $f(T_1) \subset O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap f(T_1) \neq \emptyset$, $O_2 \cap f(T_1) \neq \emptyset$. Dann sind $U_i := f^{-1}(O_i)$ offen und nichtleer sowie $T_1 = U_1 \cup U_2$. Da T_1 zusammenhängend ist, folgt $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, also $(O_1 \cap f(T_1)) \cap (O_2 \cap f(T_1)) \neq \emptyset$, und $f(T_1)$ ist zusammenhängend. □

Der folgende Begriff ist mit dem Zusammenhangsbegriff eng verwandt.

Definition I.6.4 Sei T ein topologischer Raum.

(a) Ein *Weg* von $a \in T$ nach $b \in T$ ist eine stetige Abbildung $f\colon [0,1] \to T$ mit $f(0) = a$, $f(1) = b$. Ist $a = b$, heißt der Weg *geschlossen*.

(b) T heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in T$ einen Weg von a nach b gibt.

In der Definition kann das Parameterintervall $[0,1]$ natürlich durch jedes andere kompakte Intervall positiver Länge ersetzt werden.

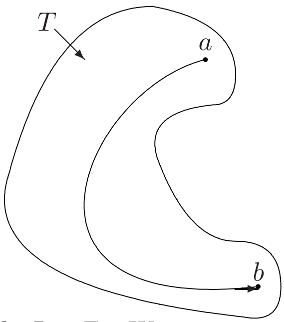


Abb. I.1. Ein Weg von a nach b

Die obigen Begriffe sind für die Funktionentheorie besonders wichtig. Hier beobachten wir:

Satz I.6.5 *Ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei T wegzusammenhängend, und schreibe $T = O_1 \cup O_2$ mit offenen Mengen $O_i \neq \emptyset$. Wir werden $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$ zeigen. Wähle dazu $a \in O_1$, $b \in O_2$ und einen Weg f von a nach b. Da $f([0,1])$ nach Beispiel I.6(c) und Satz I.6.3 zusammenhängend ist, existiert ein Element $t \in (f([0,1]) \cap O_1) \cap (f([0,1]) \cap O_2) \subset O_1 \cap O_2$. □

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht; wir skizzieren das übliche Gegenbeispiel. Sei

$$\begin{aligned} S &= \{(x, \sin 1/x)\colon x > 0\} \subset \mathbb{R}^2, \\ T &= S \cup \{(0,y)\colon |y| \leq 1\}. \end{aligned}$$

S ist der Graph von $x \mapsto \sin 1/x$ auf $(0,\infty)$, d.h. das Bild des Intervalls $(0,\infty)$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto (x, \sin 1/x)$; also ist S nach Satz I.6.3 zusammenhängend. Ferner ist $T = \overline{S}$ (Beweis?); daraus folgt der Zusammenhang von T (Aufgabe I.9.32(a)).

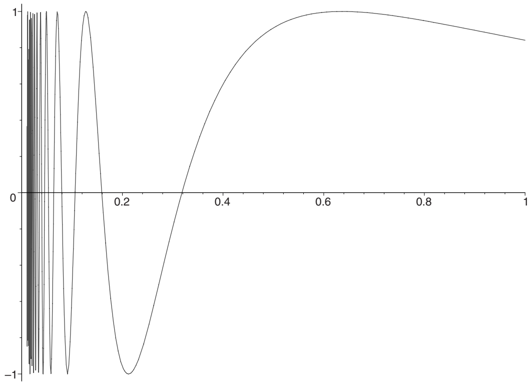


Abb. I.2. Der Graph von $\sin 1/x$

Es gibt jedoch keinen Weg von $(0,0)$ nach $(1/\pi, 0)$ in T. Sei nämlich f: $t \mapsto (f_1(t), f_2(t))$ solch ein Weg. Beachte, dass f_1 und f_2 stetige Funktionen sind (Lemma I.3.5). Setze $t_0 = \sup\{t \in [0,1]\colon f_1(t) = 0\}$. Da f_1 stetig ist, gilt auch $f_1(t_0) = 0$. Wähle jetzt ein $\delta > 0$ mit ($\| \,.\, \|$ bezeichne die euklidische Norm)

$$t_0 \le t \le t_0 + \delta \quad \Rightarrow \quad \|f(t) - f(t_0)\| \le \frac{1}{2}. \tag{I.9}$$

Nun ist $f_1([t_0, t_0+\delta])$ zusammenhängend und kompakt (letzteres wegen Satz I.5.3(c)), und es ist $f_1(t) > 0$ für $t > t_0$. Also ist $f_1([t_0, t_0+\delta])$ von der Form $[0, \eta]$ für ein $\eta > 0$. Daher existieren für alle hinreichend großen n Punkte $t_n \in [t_0, t_0+\delta]$ mit $f_1(t_n) = 1/(n\pi) \le \eta$; dann ist $f_2(t_n) = (-1)^n$ und deshalb $\|f(t_n) - f(t_{n+1})\| \ge 2$: Widerspruch zu (I.9)!

Für offene Teilmengen des $\mathbb{R}^d$ gilt jedoch:

Satz I.6.6 *Ist $T \subset \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend, so ist T auch wegzusammenhängend.*

Beweis. Sei $a \in T$. Wir setzen

$$S = \{b \in T\colon \text{es existiert ein Weg in } T \text{ von } a \text{ nach } b\}$$

und zeigen, dass S offen und abgeschlossen in T ist. Wegen $a \in S$ muss dann $S = T$ sein, was zu zeigen war.

Dazu eine Vorbemerkung. Ist f ein Weg von a nach b und g ein Weg von b nach c, so definiert

$$f \oplus g\colon t \mapsto \begin{cases} f(2t) & \text{für } 0 \le t \le 1/2 \\ g(2t-1) & \text{für } 1/2 < t \le 1 \end{cases}$$

offensichtlich eine stetige Funktion, also einen Weg von a nach c. Noch eine Bezeichnung: Wir setzen für die euklidische Norm des $\mathbb{R}^d$

$$U_\varepsilon(b) = \{x \in \mathbb{R}^d\colon \|x - b\| < \varepsilon\}.$$

Nun zum Beweis der Offenheit von S. Sei $b \in S$, und wähle $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(b) \subset T$; das ist möglich, da T offen in $\mathbb{R}^d$ ist. Ist $c \in U_\varepsilon(b)$, f_1 ein Weg von a nach b und $f_2(t) = b + t(c-b)$, so ist f_2 ein Weg von b nach c in $U_\varepsilon(b)$, also in T. Daher ist $f_1 \oplus f_2$ ein Weg in T von a nach c und deshalb $c \in S$. Das zeigt $U_\varepsilon(b) \subset S$, und S ist offen.

Zum Beweis der (relativen) Abgeschlossenheit von S sei $b \in \overline{S} \cap T$; das ist der relative Abschluss von S in T. Wähle wieder $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(b) \subset T$, und wähle anschließend $c \in S \cap U_\varepsilon(b)$. Dann gibt es einen Weg f_1 von a nach c, und $f_2(t) = c + t(b-c)$ definiert einen Weg von c nach b in T. Daher ist $f_1 \oplus f_2$ ein Weg von a nach b in T, d.h. $\overline{S} \cap T \subset S$, und S ist abgeschlossen in T. □

Eine offensichtliche Beweisvariante zeigt (Aufgabe I.9.33):

Korollar I.6.7 *Ist $T \subset \mathbb{R}^d$ offen und zusammenhängend, so können je zwei Punkte von T durch einen achsenparallelen Polygonzug in T verbunden werden.*

I.7 Existenz stetiger Funktionen, normale Räume

Wie das Beispiel der indiskreten Topologie zeigt, garantiert die Definition eines topologischen Raums nicht, dass es auch viele offene Mengen gibt. Die mengentheoretische Topologie kennt eine ganze Hierarchie von *Trennungsaxiome* genannten Reichhaltigkeitsbedingungen, die von den meisten der für die Analysis wichtigen Topologien allesamt erfüllt werden. Eine solche Bedingung ist uns in der Hausdorffeigenschaft bereits begegnet. Die Hausdorffeigenschaft impliziert aber noch nicht, dass es nichttriviale stetige reellwertige Funktionen gibt.

Satz I.7.1 *Es gibt einen Hausdorffraum T, auf dem jede stetige Funktion $f\colon T \to \mathbb{R}$ konstant ist.*

Beweis. Es sei $T = \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2\colon y \geq 0\}$; um das gewünschte Beispiel zu erhalten, werden wir T auf folgende Weise mit einer Topologie versehen. Betrachte zu $(x,y) \in T$

$$\begin{aligned} U_\varepsilon^+(x,y) &= \{(z,0)\colon z \in \mathbb{Q},\ |z - (x - y/\sqrt{2})| < \varepsilon\}, \\ U_\varepsilon^-(x,y) &= \{(z,0)\colon z \in \mathbb{Q},\ |z - (x + y/\sqrt{2})| < \varepsilon\}, \\ U_\varepsilon(x,y) &= \{(x,y)\} \cup U_\varepsilon^-(x,y) \cup U_\varepsilon^+(x,y). \end{aligned}$$

Die U_ε erfüllen (1)–(3) aus Satz I.2.7, und wir versehen T mit der in Satz I.2.7 beschriebenen Topologie, so dass die $U_\varepsilon(x,y)$ eine Umgebungsbasis von (x,y) bilden.

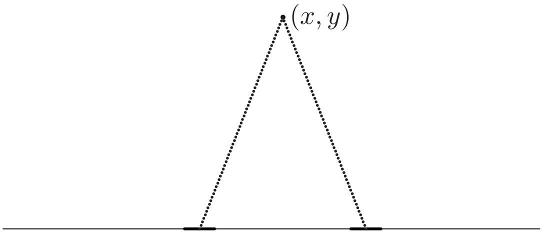


Abb. I.3. Die Umgebung $U_\varepsilon(x, y)$

Es ist nun geometrisch evident, dass T ein Hausdorffraum ist, denn, da die oben skizzierten Geraden eine irrationale Steigung haben, liegt kein weiterer Punkt aus $\mathbb{Q}^2$ auf ihnen.

Nehmen wir nun an, es gäbe eine nichtkonstante stetige Funktion $f\colon T \to \mathbb{R}$; ohne Einschränkung können wir annehmen, dass f die Werte 0 und 1 annimmt: $f(t_0) = 0$, $f(t_1) = 1$. Dann sind $V_0 = \{t \in T\colon f(t) < 1/3\}$ und $V_1 = \{t \in T\colon f(t) > 2/3\}$ disjunkte offene Mengen, deren Abschlüsse ebenfalls disjunkt sind, da ja (Satz I.3.2(iv)) $f(\overline{V}_0) \subset (-\infty, 1/3]$ und $f(\overline{V}_1) \subset [2/3, \infty)$. Das führt zu einem Widerspruch, wenn wir folgende Behauptung zeigen können:

- *Für $(x, y) \neq (x', y') \in T$ und $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ ist $\overline{U_\varepsilon(x, y)} \cap \overline{U_{\varepsilon'}(x', y')} \neq \emptyset$.*

Beweis hierfür: $\overline{U_\varepsilon(x, y)}$ hat die Gestalt eines unendlich hohen W's (bzw. im Fall $y = 0$ eines unendlich hohen V's).

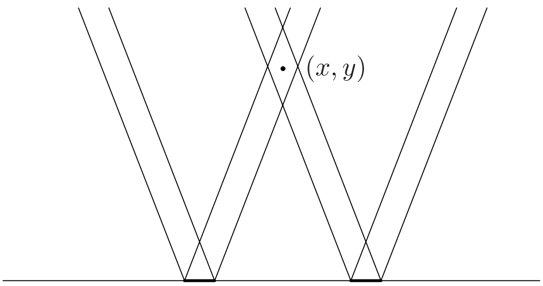


Abb. I.4. Der Abschluss von $U_\varepsilon(x, y)$

Da $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+$ bezüglich der euklidischen Topologie dicht in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ liegt, schneiden sich je zwei dieser W's (bzw. je zwei dieser V's bzw. je ein V und ein W). Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Der im letzten Satz konstruierte Raum wird *irrational slope space* genannt; die Konstruktion stammt von R. H. Bing[6].

Es zeigt sich, dass folgende Variante der Hausdorffeigenschaft zu Existenzaussagen für stetige Funktionen führt.

[6] R. H. Bing, *A connected countable Hausdorff space*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 474.

Definition I.7.2 Ein topologischer Raum heißt *normal*, wenn es zu je zwei nichtleeren abgeschlossenen disjunkten Teilmengen $A, B \subset T$ offene disjunkte Teilmengen $U \supset A$ und $V \supset B$ gibt.

Man sagt dann, A und B können durch offene Mengen getrennt werden. Klar, aber wichtig ist die Bemerkung, dass Normalität ein homöomorphieinvarianter Begriff ist.

Normalität ist nicht zwingend eine Verschärfung der Hausdorffeigenschaft, da in Nicht-Hausdorffräumen einpunktige Mengen nicht abgeschlossen zu sein brauchen. Achtung: Manche Autoren setzen in der Definition eines normalen Raums die Hausdorffeigenschaft voraus; andere nennen normale Hausdorffräume T_4-*Räume* (Hausdorffräume heißen auch T_2-*Räume*[7]).

Beispiele. (a) Der Sierpiński-Raum ist normal, denn es gibt kein Paar abgeschlossener nichtleerer disjunkter Teilmengen.

(b) Jeder metrische Raum (T, d) ist normal. Betrachte nämlich zu $A \subset T$ die Funktion

$$t \mapsto \operatorname{dist}(t, A) = \inf\{d(t, s) \colon s \in A\}. \tag{I.10}$$

Die umgekehrte Dreiecksungleichung zeigt, dass diese Funktion stetig ist, und es gilt $\operatorname{dist}(t, A) = 0$ genau dann, wenn $t \in \overline{A}$ ist. Seien nun $A, B \subset T$ abgeschlossen, nicht leer und disjunkt. Dann ist die Funktion

$$f \colon T \to [0, 1], \qquad f(t) = \frac{\operatorname{dist}(t, A)}{\operatorname{dist}(t, A) + \operatorname{dist}(t, B)}$$

wohldefiniert und stetig, und sie erfüllt

$$f(t) = 0 \quad \forall t \in A, \qquad f(t) = 1 \quad \forall t \in B.$$

Daher sind $U = \{t \colon f(t) < 1/2\}$ und $V = \{t \colon f(t) > 1/2\}$ disjunkte offene Umgebungen von A und B.

Eine weitere Beispielklasse liefert das folgenden Lemma.

Lemma I.7.3 *Ein kompakter Hausdorffraum ist normal.*

Beweis. Sei T kompakt, und seien $A, B \subset T$ abgeschlossen, nicht leer und disjunkt. Sei zunächst $b \in B$ fest. Zu jedem $a \in A$ wähle offene Umgebungen U_a von a und V_a von b, die disjunkt sind. Da die U_a eine offene Überdeckung von A bilden und A abgeschlossen, also kompakt ist (Satz I.5.3(a)), existieren $a_1, \dots, a_n$ mit $A \subset \bigcup_{k=1}^n U_{a_k}$. Der endliche Schnitt $\bigcap_{k=1}^n V_{a_k}$ ist eine offene Umgebung von b, die $\bigcup_{k=1}^n U_{a_k}$ nach Konstruktion nicht schneidet. Wir haben damit gezeigt:

[7] Wer vermutet, dass es auch T_1- und T_3-Räume gibt, liegt richtig; mehr noch: man findet T_0-, $T_{2\frac{1}{2}}$-, T_{3a}-Räume etc.

- *Für alle $b \in B$ existieren eine offene Menge $O_b \supset A$ und eine offene Umgebung W_b von b mit $O_b \cap W_b = \emptyset$.*

Ein weiterer Kompaktheitsschluss liefert endlich viele $W_{b_1}, \dots, W_{b_m}$ mit $B \subset \bigcup_{k=1}^m W_{b_k} =: W$; W und $O := \bigcap_{k=1}^m O_{b_k}$ sind dann offen, und es ist $A \subset O$, $B \subset W$ sowie $O \cap W = \emptyset$. Das war zu zeigen. □

Nun kommen wir zu dem relevanten Satz über normale Räume.

Theorem I.7.4 (Satz von Tietze-Urysohn)
Für einen topologischen Raum sind äquivalent:

(i) *T ist normal.*

(ii) *Sind A und B abgeschlossene disjunkte Teilmengen von T, so existiert eine stetige Funktion $f\colon T \to [0,1]$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.*

(iii) *Zu jeder abgeschlossenen Teilmenge A von T und jeder stetigen Funktion $f\colon A \to [a,b]$ existiert eine stetige Fortsetzung $F\colon T \to [a,b]$.*

Hier ist (i) ⇒ (ii) das *Lemma von Urysohn* und (i) ⇒ (iii) der *Fortsetzungssatz von Tietze*. Die Implikationen (iii) ⇒ (ii) ⇒ (i) sind klar; für erstere setze die stetige Funktion $f\colon A \cup B \to [0,1]$, $f(t) = 0$ für $t \in A$, $f(t) = 1$ für $t \in B$, fort, und für letztere verwende das Argument von Beispiel I.7(b). Dort wurde (ii) auf einfache Weise für metrische Räume bewiesen. Auch (iii) kann für metrische Räume direkt gezeigt werden (siehe Seite 39), jedoch bleibt (iii) im Fall metrischer Räume eine nichttriviale Angelegenheit.

Beweis. (i) ⇒ (ii): Wir benutzen folgende einfache Charakterisierung der Normalität, die in Aufgabe I.9.37 zu zeigen ist.

- *Ein topologischer Raum T ist genau dann normal, wenn für alle $F \subset G \subset T$, F abgeschlossen, G offen, eine offene Menge O mit $F \subset O \subset \overline{O} \subset G$ existiert.*

Dieses Kriterium wird zuerst mit $F = A$ und $G = T \setminus B$ angewandt; es existiert also eine offene Menge $O_{1/2}$ mit $A \subset O_{1/2} \subset \overline{O}_{1/2} \subset T \setminus B$. Als nächstes wenden wir das Kriterium mit $F = A$, $G = O_{1/2}$ bzw. $F = \overline{O}_{1/2}$, $G = T \setminus B$ an; das liefert offene Mengen $O_{1/4}$ bzw. $O_{3/4}$ mit $A \subset O_{1/4} \subset \overline{O}_{1/4} \subset O_{1/2}$, $\overline{O}_{1/2} \subset O_{3/4} \subset \overline{O}_{3/4} \subset T \setminus B$. So fortfahrend, ordnen wir jedem dyadischen Bruch $r = m/2^n$ in $(0,1)$ eine offene Menge O_r zu, so dass für dyadische Brüche $0 < p < r < 1$ stets

$$A \subset O_p \subset \overline{O}_p \subset O_r \subset \overline{O}_r \subset T \setminus B \tag{I.11}$$

gilt. Wir erklären jetzt eine Funktion $f\colon T \to [0,1]$ durch

$$f(t) = \begin{cases} \inf\{r\colon t \in O_r\} & \text{falls } t \in \bigcup_r O_r, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offenbar ist $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$, und es bleibt, die Stetigkeit von f zu zeigen. Diese folgt sofort aus folgenden Aussagen:

(a) Für alle $0 < s \le 1$ ist $\{f < s\} := \{t\colon f(t) < s\}$ offen.

(b) Für alle $0 \le s < 1$ ist $\{f > s\} := \{t\colon f(t) > s\}$ offen.

Zum Beweis von (a) bemerke nur, dass für ein $t \in T$ die Ungleichung $f(t) < s$ genau dann gilt, wenn es einen dyadischen Bruch $r < s$ mit $t \in O_r$ gibt; dann ist also $O_r \subset \{f < s\}$ und t ein innerer Punkt von $\{f < s\}$. Da t beliebig war, ist $\{f < s\}$ offen.

Zum Beweis von (b) stellt man als erstes fest, dass für ein $t \in T$ die Ungleichung $f(t) > s$ genau dann gilt, wenn es einen dyadischen Bruch $r > s$ mit $t \notin O_r$ gibt. Ist $p \in (s, r)$ ein weiterer dyadischer Bruch, muss wegen (I.11) auch $t \notin \overline{O_p}$ gelten; d.h. $t \in T \setminus \overline{O_p} \subset \{f > s\}$, und wie oben folgt die Offenheit von $\{f > s\}$.

Damit ist der Beweis der Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii) vollständig.

Für den Beweis von (ii) $\Rightarrow$ (iii) darf man ohne Einschränkung $a = -1$, $b = 1$ annehmen. Wir dritteln das Intervall $[-1, 1]$ und betrachten die Mengen $A_- = \{t \in A\colon f(t) \le -1/3\}$ und $A_+ = \{t \in A\colon f(t) \ge 1/3\}$; dies sind abgeschlossene disjunkte Teilmengen von A und deshalb abgeschlossene disjunkte Teilmengen von T. Nach (ii) (genauer einer offensichtlichen Folgerung daraus) existiert eine stetige Funktion $F_1\colon T \to [-1/3, 1/3]$ mit $F_1|_{A_-} = -1/3$ und $F_1|_{A_+} = 1/3$. Für $t \in A$ hat man

$$|f(t) - F_1(t)| \le \frac{2}{3},$$

da $|f(t)| < 1/3$, wenn t weder in A_- noch in A_+ liegt. Nun wendet man dasselbe Argument auf die Funktion $f_1 = f - F_1|_A\colon A \to [-2/3, 2/3]$ an. Man erhält eine stetige Funktion $F_2\colon T \to [-2/9, 2/9]$ mit

$$|f(t) - F_1(t) - F_2(t)| = |f_1(t) - F_2(t)| \le \frac{4}{9} \qquad \forall t \in A.$$

So fortfahrend, definiert man stetige Funktionen F_n auf T mit

$$|F_n(t)| \le \frac{1}{3}\Bigl(\frac{2}{3}\Bigr)^{n-1} \qquad \forall t \in T \tag{I.12}$$

und

$$\Bigl|f(t) - \sum_{k=1}^{n} F_k(t)\Bigr| \le \Bigl(\frac{2}{3}\Bigr)^{n} \qquad \forall t \in A. \tag{I.13}$$

Wegen (I.12) konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} F_k(t)$ für jedes $t \in T$ und definiert so eine Funktion $F\colon T \to [-1, 1]$, denn

$$|F(t)| \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\Bigl(\frac{2}{3}\Bigr)^{k-1} = 1.$$

Andererseits zeigt (I.13) $F|_A = f$. Was jetzt noch fehlt, ist die Beobachtung, dass wegen (I.12) die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} F_k$ sogar gleichmäßig konvergiert und deshalb eine stetige Funktion darstellt; letzteres zeigt man wie in der Analysisvorlesung (Aufgabe I.9.40 oder Beispiel V.1(c)). $\square$

Wie angedeutet, kann der Fortsetzungssatz von Tietze für metrische Räume mit einem direkten Argument bewiesen werden, wie folgt. Offensichtlich reicht es, den Fall $a = 1$, $b = 2$ zu behandeln. In diesem Fall setzt man $F(t) = f(t)$ für $t \in A$ und

$$F(t) = \frac{\inf\{f(s)d(s,t)\colon s \in A\}}{\inf\{d(s,t)\colon s \in A\}}$$

für $t \notin A$. Es ist nicht schwer zu verifizieren, dass F wirklich stetig ist.

I.8 Der Satz von Baire

In jedem topologischen Raum liegt der Schnitt endlich vieler offener und dichter Mengen wieder dicht (Beweis?). R. Baire zeigte 1899, dass dies im Fall des $\mathbb{R}^d$ auch für den Schnitt *abzählbar vieler* offener und dichter Mengen gilt. Dieser unscheinbar anmutende Satz hat überraschende und wichtige Konsequenzen, wie in diesem Abschnitt erläutert werden soll.

Um den Satz von Baire prägnant formulieren zu können, führen wir eine Vokabel ein.

Definition I.8.1 Ein topologischer Raum heißt *Baireraum*, wenn der Schnitt von abzählbar vielen offenen und dichten Mengen wieder dicht liegt.

Offenbar ist $\mathbb{Q}$ mit der euklidischen Topologie kein Baireraum, denn ist $\{r_1, r_2, \dots\}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$, so ist jede der Mengen $\mathbb{Q} \setminus \{r_n\}$ offen und dicht, aber ihr Schnitt ist leer.

Die bedeutendsten positiven Resultate sind im folgenden Satz enthalten.

Theorem I.8.2 (Satz von Baire)

(a) *Vollständige metrische Räume sind Baireräume.*

(b) *Kompakte Hausdorffräume sind Baireräume.*

Beweis. (a) Seien O_n, $n \in \mathbb{N}$, offene und dichte Teilmengen eines vollständigen metrischen Raums (T, d), und setze $D = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Es ist zu zeigen, dass jede offene ε-Kugel in T ein Element von D enthält.

Sei $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in T\colon d(x, x_0) < \varepsilon\}$ eine solche Kugel. Da O_1 offen und dicht ist, ist $O_1 \cap U_\varepsilon(x_0)$ offen und nicht leer. Es existieren also $x_1 \in O_1$, $\varepsilon_1 > 0$ (o.E. $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}\varepsilon$) mit

$$U_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_1 \cap U_\varepsilon(x_0).$$

Nach eventueller weiterer Verkleinerung von ε_1 erhält man sogar

$$\overline{U_{\varepsilon_1}(x_1)} \subset O_1 \cap U_\varepsilon(x_0).$$

Betrachte nun O_2. Auch O_2 ist offen und dicht, daher ist $O_2 \cap U_{\varepsilon_1}(x_1)$ offen und nicht leer. Wie oben existieren $x_2 \in O_2$, $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$ mit

$$\overline{U_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset O_2 \cap U_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_1 \cap O_2 \cap U_\varepsilon(x_0).$$

Auf diese Weise werden induktiv Folgen (ε_n) und (x_n) mit folgenden Eigenschaften definiert:

(1) $\varepsilon_n < \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}$, folglich $\varepsilon_n < 2^{-n}\varepsilon$.

(2) $\overline{U_{\varepsilon_n}(x_n)} \subset O_n \cap U_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \subset \cdots \subset O_1 \cap \cdots \cap O_n \cap U_\varepsilon(x_0)$.

Es folgt insbesondere

$$x_n \in U_{\varepsilon_N}(x_N) \subset U_{2^{-N}\varepsilon}(x_N) \qquad \forall n > N, \tag{I.14}$$

d.h., (x_n) ist eine Cauchyfolge. Da T vollständig ist, existiert der Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$. Eine unmittelbare Konsequenz von (I.14) ist dann

$$x \in \overline{U_{\varepsilon_N}(x_N)} \qquad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Mit Hilfe von (2) ergibt sich daraus $x \in D \cap U_\varepsilon(x_0)$.

(b) Der Beweis im kompakten Fall ist ähnlich und verwendet statt der Vollständigkeit die endliche Durchschnittseigenschaft (Satz I.5.7). Wir werden mehrfach die Normalität kompakter Hausdorffräume T (Lemma I.7.3) benutzen.

Seien O_n wieder offene und dichte Teilmengen und D ihr Schnitt. Sei $O \subset T$ eine weitere offene Menge; es ist $D \cap O \neq \emptyset$ zu zeigen. Da O_1 offen und dicht ist, ist $O_1 \cap O$ offen und $\neq \emptyset$; wähle gemäß Aufgabe I.9.37 eine offene Menge U_1 mit $\emptyset \neq U_1 \subset \overline{U_1} \subset O_1 \cap O$. Da O_2 offen und dicht ist, ist $O_2 \cap U_1$ offen und $\neq \emptyset$. Wie oben wähle eine offene Menge U_2 mit $\emptyset \neq U_2 \subset \overline{U_2} \subset O_2 \cap U_1 \subset O_2 \cap O_1 \cap O$. So fortfahrend, erhält man eine absteigende Folge offener Mengen $\emptyset \neq U_n \subset O_n \cap \cdots \cap O_1 \cap O$ mit $U_{n+1} \subset \overline{U}_{n+1} \subset U_n$. Da je endlich viele der abgeschlossenen Mengen $\overline{U}_n$ einen nichtleeren Schnitt haben, impliziert die Kompaktheit, dass $\bigcap_n U_n = \bigcap_n \overline{U}_n \neq \emptyset$. Jedes Element dieser Schnittmenge liegt in $D \cap O$. $\square$

Bairesche Räume haben schlechte Erblichkeitseigenschaften; obwohl die in Theorem I.8.2 genannten Raumklassen stabil gegenüber Bildung abgeschlossener Teilmengen ist, ist das für Baireräume allgemein nicht richtig (Aufgabe I.9.45). Hingegen gilt:

Satz I.8.3 *Offene Teilmengen von Baireräumen sind selbst Baireräume.*

Beweis. Sei T ein Baireraum und $O \subset T$ offen; beachte, dass die relativ offenen Teilmengen von O genau diejenigen offenen Mengen von T sind, die in O enthalten sind. Es seien $O_1, O_2, \ldots \subset O$ offen und dicht in O. Setze $U_n = O_n \cup (T \setminus \overline{O})$; dies sind offene und dichte Teilmengen von T (letzteres, da nach Aufgabe I.9.5 ∂O keine inneren Punkte hat). Also liegt nach Voraussetzung $\bigcap_n U_n$ dicht in T und deshalb $\bigcap_n O_n$ dicht in O. $\square$

Insbesondere folgt, dass offene Intervalle Baireräume sind. Das hätte man auch aus Theorem I.8.2(a) schließen können, obwohl die euklidische Metrik auf einem Intervall der Form (a, b) nicht vollständig ist. Theorem I.8.2(a) enthält jedoch einen zusätzlichen Freiheitsgrad, den man im ersten Moment übersehen könnte; man ist nämlich in der Wahl der Metrik, welche die Topologie erzeugt, frei. So erzeugt etwa auf $I = (-\pi/2, \pi/2)$ die durch

$$d_2(s, t) = |\tan s - \tan t|$$

definierte Metrik dieselbe Topologie wie die übliche Metrik $d_1(s, t) = |s - t|$, im Gegensatz zur letzteren ist (I, d_2) aber vollständig (Beweis?).

Es ist trivial, dass zwei dichte Teilmengen eines topologischen Raums einen leeren Schnitt haben können. Nennt man einen abzählbaren Schnitt von offenen Mengen eine *G_δ-Menge* (wobei G an „Gebiet“ und δ an „Durchschnitt“ erinnern soll)[8], so läßt sich Theorem I.8.2 so formulieren:

- *In einem vollständigen metrischen Raum oder einem kompakten Hausdorffraum ist der abzählbare Schnitt von dichten G_δ-Mengen eine dichte G_δ-Menge.*

Dichte G_δ-Mengen in Baireschen Räumen sind also „sehr“ dicht.

Häufig ist eine weitere Umformulierung von Nutzen. Dazu wird folgende Terminologie benötigt; sie stammt von Baire und ist leider etwas unanschaulich, hat sich aber in der Literatur fest eingebürgert.

Definition I.8.4

(a) Eine Teilmenge M eines topologischen Raums heißt *nirgends dicht*, wenn $\overline{M}$ keinen inneren Punkt besitzt.

(b) M heißt *von 1. Kategorie*, wenn es eine Folge (M_n) nirgends dichter Mengen mit $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ gibt.

(c) M heißt *von 2. Kategorie*, wenn M nicht von 1. Kategorie ist.

Nirgends dichte Mengen liegen in der Tat in keiner offenen Menge („nirgends“) dicht. Einfaches Beispiel: $\mathbb{Q}$ ist von 1. Kategorie in $\mathbb{R}$.

Durch Komplementbildung, nämlich $\complement(\bigcup_n M_n) = \bigcap_n \complement M_n \supset \bigcap_n \complement \overline{M_n}$, erhält man aus Theorem I.8.2:

[8] Das Gegenstück dazu, eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen, heißt *F_σ-Menge*; F wie frz. *fermé* und σ wie Summe.

Korollar I.8.5 (Bairescher Kategoriensatz)
In einem vollständigen metrischen Raum oder einem kompakten Hausdorffraum liegt das Komplement einer Menge 1. Kategorie dicht.

Oft wird nur folgende schwächere Form benötigt.

Korollar I.8.6 *Ein nicht leerer Baireraum, z.B. ein vollständiger metrischer Raum oder ein kompakter Hausdorffraum, ist von 2. Kategorie in sich.*

Der Bairesche Kategoriensatz gestattet häufig relativ einfache (aber nichtkonstruktive) Beweise für Existenzaussagen. Das geschieht nach folgendem Muster: Gesucht ist ein Objekt mit einer gewissen Eigenschaft (E). Zeige dann, dass die Gesamtheit der zu untersuchenden Objekte einen Baireschen Raum, z.B. einen vollständigen metrischen Raum, bildet, worin die Objekte ohne Eigenschaft (E) eine Teilmenge 1. Kategorie formen. Folglich gibt es Objekte mit Eigenschaft (E), und diese liegen sogar dicht!

Wir wollen ein paar Anwendungen dieser Idee besprechen.

Sind $f_n\colon T \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem topologischen Raum und konvergiert die Folge punktweise, etwa gegen

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t),$$

so braucht f natürlich nicht stetig zu sein. (Eine Funktion, die punktweiser Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen ist, heißt *Funktion der 1. Baireschen Klasse.*) Auf Baireräumen kann eine Funktion der 1. Baireschen Klasse nicht vollkommen unstetig sein:

Satz I.8.7 *Sei T ein Baireraum, und sei $f\colon T \to \mathbb{R}$ der punktweise Limes der stetigen Funktionen $f_n\colon T \to \mathbb{R}$. Dann bilden die Stetigkeitspunkte von f, also $\{t \in T\colon f \text{ ist stetig bei } t\}$, eine dichte G_δ-Menge. Insbesondere besitzt f einen Stetigkeitspunkt.*

Beweis. Als erstes definieren wir den Stetigkeitsmodul $\omega\colon T \to \mathbb{R}$ von f wie folgt. Zu $t \in T$ und einer offenen Umgebung U von t setze

$$\omega(t, U) = \sup\{|f(s_1) - f(s_2)|\colon s_1, s_2 \in U\}$$

und dann

$$\omega(t) = \inf_U \omega(t, U),$$

wobei sich das Infimum über alle offenen Umgebungen von t erstreckt.

Nach Konstruktion sind alle Mengen der Form $O_\varepsilon = \{t \in T\colon \omega(t) < \varepsilon\}$ offen, und die Menge der Stetigkeitspunkte von f ist $\bigcap_{\varepsilon>0} O_\varepsilon = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} O_{1/k}$ und deswegen eine G_δ-Menge. Um deren Dichtheit zu zeigen, ist also die Dichtheit jeder Menge O_ε nachzuweisen.

Sei dazu $O \subset T$ offen und nicht leer. Betrachte zu $\varepsilon > 0$

$$E_n = \bigcap_{i,j \geq n} \{t \in O\colon |f_i(t) - f_j(t)| \leq \varepsilon/4\};$$

dies sind bezüglich der Relativtopologie abgeschlossene Teilmengen von O, und nach Voraussetzung ist $\bigcup_n E_n = O$. Nach Satz I.8.3 ist O ein Baireraum und deshalb (Korollar I.8.6) von 2. Kategorie in sich; also enthält eines der E_n einen (bzgl. O und deshalb auch bzgl. T) inneren Punkt. Es existieren also ein $N \in \mathbb{N}$ und eine offene Menge $\emptyset \neq U \subset E_N$. Indem man zum Grenzwert $j \to \infty$ übergeht, sieht man, dass

$$|f_N(t) - f(t)| \leq \varepsilon/4 \qquad \forall t \in U.$$

Indem man U, falls notwendig, verkleinert, darf man wegen der Stetigkeit von f_N auch

$$|f_N(s_1) - f_N(s_2)| \leq \varepsilon/4 \qquad \forall s_1, s_2 \in U$$

annehmen. Also ist für $s_1, s_2 \in U$

$$\begin{aligned} |f(s_1) - f(s_2)| &\leq |f(s_1) - f_N(s_1)| + |f_N(s_1) - f_N(s_2)| + |f_N(s_2) - f(s_2)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

und daher $\omega(t) < \varepsilon$ für alle $t \in U$. Das zeigt $O_\varepsilon \cap O \neq \emptyset$, und O_ε ist dicht in T. □

Im nächsten Satz[9] geben wir eine überraschende Charakterisierung von Polynomen. Es bezeichnet $f^{(n)}$ die n-te Ableitung einer Funktion f.

Satz I.8.8 *Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ existiert ein Index $n = n(t) \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(n)}(t) = 0$. Dann ist f ein Polynom.*

Beweis. Betrachte die Vereinigung O aller offenen Intervalle, auf denen f mit einem Polynom übereinstimmt. Wir können noch jedes solche Intervall maximal nach links und rechts ausdehnen und erhalten so die Familie $\mathscr{J}$ der maximalen offenen (paarweise disjunkten) Intervalle, auf denen f mit einem Polynom übereinstimmt. Nach Konstruktion ist $O = \bigcup_{J \in \mathscr{J}} J$, und es ist klar, dass O als Vereinigung offener Intervalle selbst offen ist. Weniger klar ist, dass $O \neq \emptyset$; das kann man mit Hilfe des Satzes von Baire zwar begründen (in der Tat liegt O dicht), wird aber im weiteren Fortgang a priori nicht benötigt.

[9]E. Corominas, F. Sunyer Balaguer, *Conditions for an infinitely differentiable function to be a polynomial*, Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 14 (1954), 26–43; R. P. Boas, *Solution to Problem 4813: Necessary and sufficient condition for a polynomial*, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 599.

Es ist nun zu zeigen, dass $O = \mathbb{R}$ gilt, denn dann besteht $\mathscr{J}$ nur aus einem einzigen Intervall ($\mathbb{R}$ ist zusammenhängend!), und f ist ein Polynom. Nehmen wir statt dessen an, $A := \mathbb{R} \setminus O$ wäre nicht leer. Da O offen ist, ist A abgeschlossen. Wir werden jetzt durch eine Anwendung des Satzes von Baire einen Punkt $t_0 \in A$ produzieren, von dem gezeigt werden wird, dass er in Wirklichkeit in O liegt. Dieser Widerspruch schließt den Beweis von Satz I.8.8 ab.

Betrachten wir dazu die Mengen

$$E_n = \{t \in A \colon f^{(n)}(t) = 0\}.$$

Dann sind die E_n in A relativ abgeschlossen, da die $f^{(n)}$ stetig sind, und nach Voraussetzung gilt $\bigcup_{n\geq 0} E_n = A$. Da A als abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ selbst vollständig und deshalb ein Baireraum ist, enthält nach Korollar I.8.6 für ein geeignetes $N \geq 0$ die Menge E_N einen inneren Punkt relativ zu A; es existieren also $t_0 \in A$ und ein $\varepsilon_0 > 0$ mit

$$t \in A,\ |t - t_0| \leq \varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad f^{(N)}(t) = 0. \tag{I.15}$$

In der Tat gilt sogar

$$t \in A,\ |t - t_0| \leq \varepsilon_0,\ n \geq N \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(t) = 0. \tag{I.16}$$

Um das einzusehen, überlegen wir zuerst, dass kein Punkt von A isoliert sein kann. Wäre nämlich $t \in A$ ein isolierter Punkt von A, gäbe es Intervalle (α, t) und (t, β) in $\mathscr{J}$, auf denen f eine Polynomfunktion ist. Also ist $f^{(m_1)} = 0$ auf (α, t) und $f^{(m_2)} = 0$ auf (t, β). Ist m_0 das Maximum von m_1 und m_2, so folgt wegen der Stetigkeit von $f^{(m_0)}$ auch $f^{(m_0)} = 0$ auf (α, β), und das impliziert den Widerspruch $t \in O$.

Für den Beweis von (I.16) betrachte nun zu $t \in A$ mit $|t - t_0| \leq \varepsilon_0$ eine Folge (s_k) in A mit $|s_k - t_0| \leq \varepsilon_0$, die gegen t konvergiert; dass solche Folgen existieren, haben wir soeben begründet. Dann ist

$$f^{(N+1)}(t) = \lim_{k\to\infty} \frac{f^{(N)}(s_k) - f^{(N)}(t)}{s_k - t} = 0;$$

und (I.16) folgt per Induktion.

Wir zeigen als nächstes, dass es ein $a < t_0$ gibt, so dass f auf (a, t_0) mit einem Polynom übereinstimmt. Ist nämlich $(t_0 - \varepsilon_0, t_0) \cap A = \emptyset$, stimmt das nach Konstruktion. Andernfalls existiert $t_1 \in (t_0 - \varepsilon_0, t_0) \cap A$. Sei $J \in \mathscr{J}$ ein in (t_1, t_0) enthaltenes Intervall wie oben beschrieben; da f dort eine Polynomfunktion ist, ist $f^{(m)}|_J = 0$ für ein $m \geq 0$. Wir werden argumentieren, dass auch $f^{(N)}|_J = 0$ ist. Das ist klar für $m \leq N$. Im Fall $m > N$ schreibe $J = (s_1, s_2)$. Wegen der Maximalität von J sind $s_1, s_2 \in A$, und dann liefert (I.16) für $s \in J$

$$f^{(m-1)}(s) = \int_{s_1}^{s} f^{(m)}(\sigma)\, d\sigma + f^{(m-1)}(s_1) = 0 + 0 = 0;$$

so fortfahrend erhält man $f^{(m-1)}|_J = \cdots = f^{(N)}|_J = 0$. Daraus folgt $f^{(N)}(t) = 0$ auf (t_1, t_0) (unterscheide dazu, ob $t \in A$ oder $t \notin A$), und f ist auf (t_1, t_0) eine Polynomfunktion. (Wenn es kein solches Intervall J gibt, ist $(t_1, t_0) \subset A$, und (I.15) liefert direkt $f^{(N)}|_{(t_1,t_0)} = 0$.)

Genauso sieht man, dass für ein geeignetes $b > t_0$ die Einschränkung von f auf (t_0, b) eine Polynomfunktion ist. Also ist t_0 ein isolierter Punkt von A, was, wie oben gezeigt, unmöglich ist, weil es die Folgerung $t_0 \in O$ impliziert. $\square$

Mit Hilfe des Baireschen Satzes kann man, wenn auch auf nichtkonstruktive Weise, die Existenz stetiger, nirgends differenzierbarer Funktionen beweisen.

Satz I.8.9 *Es gibt stetige Funktionen auf* $[0, 1]$*, die an keiner Stelle differenzierbar sind.*

Beweis. Zu $n \in \mathbb{N}$ setze

$$O_n = \left\{ f \in C[0,1]\colon \sup_{0<|h|\le 1/n} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| > n \quad \forall t \in [0,1] \right\}.$$

(Um Definitionslücken zu vermeiden, setze f rechts von 1 und links von 0 konstant stetig fort.) Wir versehen $C[0, 1]$ mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz, also der von der Supremumsnorm abgeleiteten Metrik. Der Raum $C[0, 1]$ ist dann vollständig, und alle O_n sind offen und dicht (Beweis folgt). Nach dem Satz von Baire ist $D := \bigcap_n O_n$ dicht, und jedes $f \in D$ ist an keiner Stelle differenzierbar.

Zeigen wir zunächst die Offenheit der O_n. Sei $f \in O_n$. Wähle zu $t \in [0, 1]$ eine Zahl $\delta_t > 0$ mit

$$\sup_{0<|h|\le 1/n} \left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \right| > n + \delta_t.$$

Folglich existiert h_t mit $0 < |h_t| \le 1/n$ und

$$\left| \frac{f(t+h_t) - f(t)}{h_t} \right| > n + \delta_t.$$

Da f stetig ist, gilt noch für $s \in U_t$, einer hinreichend kleinen Umgebung von t,

$$\left| \frac{f(s+h_t) - f(s)}{h_t} \right| > n + \delta_t.$$

Überdecke nun das kompakte Intervall $[0, 1]$ durch endlich viele $U_{t_1}, \dots, U_{t_r}$; setze noch $\delta = \min\{\delta_{t_1}, \dots, \delta_{t_r}\}$, $h = \min\{|h_{t_1}|, \dots, |h_{t_r}|\}$. Es folgt für $s \in U_{t_i}$

$$\left| \frac{f(s+h_{t_i}) - f(s)}{h_{t_i}} \right| > n + \delta.$$

Seien nun $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}h\delta$ und $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$. Wir werden $g \in O_n$ zeigen. Sei dazu $t \in [0, 1]$, etwa $t \in U_{t_i}$. Dann ist

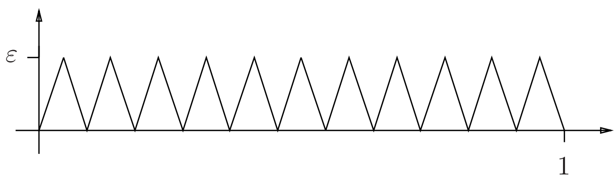
$$\left|\frac{g(t + h_{t_i}) - g(t)}{h_{t_i}}\right| \geq \left|\frac{f(t + h_{t_i}) - f(t)}{h_{t_i}}\right| - 2\frac{\|f - g\|_\infty}{|h_{t_i}|} > n + \delta - 2\frac{\varepsilon}{h} > n.$$

Daher ist O_n offen.

Es bleibt zu zeigen, dass O_n dicht ist. Sei dazu $O \neq \emptyset$ eine offene Menge. Nach dem Weierstraßschen Approximationssatz (Satz IV.9.1) existieren ein Polynom p und $\varepsilon > 0$ mit

$$\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad f \in O.$$

Sei g_m eine Sägezahnfunktion, die $[0, 1]$ auf $[0, \varepsilon]$ abbildet und deren auf- (bzw. ab-)steigende Zacken die Steigung $+m$ bzw. $-m$ aufweisen.



Dann ist stets $f_m := p + g_m \in O$. Für $m > n + \|p'\|_\infty$ erhält man jedoch für alle $t \in [0, 1]$, $0 < |h| \leq 1/n$

$$\left|\frac{f_m(t + h) - f_m(t)}{h}\right| \geq \left|\frac{g_m(t + h) - g_m(t)}{h}\right| - \left|\frac{p(t + h) - p(t)}{h}\right|,$$

wo der letzte Term wegen des Mittelwertsatzes $\leq \|p'\|_\infty$ ausfällt. Daher gilt

$$\sup_{0<|h|\leq 1/n}\left|\frac{f_m(t + h) - f_m(t)}{h}\right| \geq m - \|p'\|_\infty > n,$$

d.h., $f_m \in O_n$, und $O_n \cap O \neq \emptyset$. Daher ist O_n dicht, und der Beweis ist vollständig. □

Was Satz I.8.9 angeht, so war es Weierstraß, der 1872 das erste Beispiel einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion konstruiert hat; zur Erinnerung: die Bairesche Methode ist *nicht* konstruktiv. Sein Beispiel war die Funktion[10]

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi t)$$

[10]Dass sie nirgends differenzierbar ist, ist gut bei D. M. Bressoud, *A Radical Approach to Real Analysis*, The Mathematical Association of America 1994, beschrieben.

mit $0 < b < 1$ und einer ungeraden natürlichen Zahl a mit $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Was die Bairesche Methode aber zeigt, ist, dass solche „pathologischen“ Funktionen die typischen Funktionen sind und stetige Funktionen mit einer Differenzierbarkeitsstelle die Ausnahme, denn sie bilden eine Menge 1. Kategorie.

In Baireschen Räumen sind Mengen 1. Kategorie „vernachlässigbar“. In Abschnitt IV.6 werden wir mit den Nullmengen eine maßtheoretische Variante vernachlässigbarer Mengen kennenlernen. Dort werden die beiden Methoden noch einmal gegenübergestellt.

I.9 Aufgaben

Aufgabe I.9.1

(a) In einem metrischen Raum (T,d) gilt für $\varepsilon > 0$: $U_\varepsilon(t) = \{s\colon d(s,t) < \varepsilon\}$ ist offen, $B_\varepsilon(t) = \{s\colon d(s,t) \le \varepsilon\}$ ist abgeschlossen.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind in einem beliebigen metrischen Raum gültig?

(1) $\partial U_\varepsilon(t) = \{s\colon d(s,t) = \varepsilon\}$

(2) $\partial B_\varepsilon(t) = \{s\colon d(s,t) = \varepsilon\}$

(3) $\overline{U_\varepsilon(t)} = B_\varepsilon(t)$

Aufgabe I.9.2 Sei T eine Menge. Zeige, dass

$$\tau = \{O \subset T\colon T \setminus O \text{ ist endlich}\} \cup \{\emptyset\}$$

eine Topologie auf T ist.

Aufgabe I.9.3

(a) Auf $\mathbb{R}$ ist

$$\tau = \{(t,\infty)\colon -\infty \le t \le \infty\}$$

eine Topologie.

(b) Bestimme $\overline{\{\sqrt{2}\}}$ in dieser Topologie.

Aufgabe I.9.4 $\mathbb{Z}$ sei mit der Topologie aus Beispiel I.2(e) versehen. Zeige, dass alle endlichen Teilmengen abgeschlossen sind.

Aufgabe I.9.5 Sei M eine offene oder abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums. Dann enthält ∂M keinen inneren Punkt.

Aufgabe I.9.6 $\mathscr{P}(T)$ bezeichne die Potenzmenge einer Menge T.

(a) Ist T ein topologischer Raum, so erfüllt die Abbildung $K\colon \mathscr{P}(T) \to \mathscr{P}(T)$, $K(M) = \overline{M}$, die Bedingungen

(1) $K(\emptyset) = \emptyset$,

(2) $M \subset K(M) \quad \forall M \in \mathscr{P}(T)$,

(3) $K(K(M)) = K(M) \quad \forall M \in \mathscr{P}(T)$,

(4) $K(M \cup N) = K(M) \cup K(N) \quad \forall M, N \in \mathscr{P}(T)$.

(b) Sei umgekehrt auf der Potenzmenge einer Menge T eine Abbildung K mit den Eigenschaften (1)–(4) vorgelegt (eine solche Abbildung heißt *Kuratowskische Hüllenoperation*). Zeige, dass es eine Topologie τ auf T gibt, für die $M \subset T$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $M = K(M)$ ist.

Aufgabe I.9.7 Sei D eine dichte Teilmenge des topologischen Raums T.

(a) Dann gilt $\overline{D \cap O} = \overline{O}$ für alle offenen Mengen $O \subset T$.

(b) Für offene Mengen $O \subset T$ ist $D \cap O$ dicht in O bezüglich der Relativtopologie.

(c) Gilt (b) auch, wenn O nicht als offen vorausgesetzt wird?

Aufgabe I.9.8 Zeige, dass es eine Topologie auf $\mathbb{R}$ gibt, für die die Mengen $[t, t+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, eine Umgebungsbasis von t bilden, und dieser topologische Raum ist separabel. (So topologisiert, wird $\mathbb{R}$ die *Sorgenfrey-Gerade* genannt.)

Aufgabe I.9.9

(a) Zeige, dass es eine Topologie auf $\mathbb{R}^2$ gibt, für die die Mengen $[s, s+\varepsilon) \times [t, t+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, eine Umgebungsbasis von (s, t) bilden, und dieser topologische Raum ist separabel. (So topologisiert, wird $\mathbb{R}^2$ die *Sorgenfrey-Ebene* genannt.)

(b) Die Relativtopologie der Sorgenfrey-Ebene auf $\Delta := \{(s, -s) \colon s \in \mathbb{R}\}$ ist die diskrete Topologie.

(c) Ein Unterraum eines separablen topologischen Raums braucht nicht separabel zu sein.

(d) Ein Unterraum eines separablen metrischen Raums ist separabel.

Aufgabe I.9.10 (Produkttopologie)

(a) Seien (S, σ) und (T, τ) topologische Räume. Dann gibt es eine Topologie π auf $S \times T$, so dass die $U \times V$, $s \in U \in \sigma$, $t \in V \in \tau$, eine Umgebungsbasis von (s, t) bilden. π heißt die *Produkttopologie* von σ und τ.

(b) In der üblichen Topologie trägt $\mathbb{R}^{n+m}$ die Produkttopologie von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

Aufgabe I.9.11 Ein topologischer Raum erfüllt das *2. Abzählbarkeitsaxiom*, wenn es eine Folge $O_1, O_2, \ldots$ offener Mengen gibt, so dass jede offene Menge O Vereinigung gewisser dieser O_j ist; mit anderen Worten existiert eine Teilmenge $N \subset \mathbb{N}$ mit $O = \bigcup_{j \in N} O_j$.

(a) $\mathbb{R}$, versehen mit der euklidischen Topologie, erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom.

(b) $\mathbb{R}^d$, versehen mit der euklidischen Topologie, erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom.

(c) Ein separabler metrischer Raum erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom.

Aufgabe I.9.12 Ist die Abbildung $f \colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, $(a_n) \mapsto \sum_n a_n 2^{-n}$, ein Homöomorphismus, wenn $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Produkttopologie und $[0,1]$ die euklidische Topologie trägt?

Aufgabe I.9.13 Sei T ein topologischer Raum und $A \subset T$. Dann ist die Indikatorfunktion χ_A genau dann stetig, wenn A offen und abgeschlossen ist.

Aufgabe I.9.14 Auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ betrachte die Topologie der punktweisen Konvergenz. Setze

$$\psi\colon \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \quad \psi(f) = \sup_{s\in\mathbb{R}} \arctan f(s).$$

Dann ist ψ genau dann bei f stetig, wenn f nach oben unbeschränkt ist.

Aufgabe I.9.15

(a) Sei T_1 ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass für jeden topologischen Raum T_2 jede Abbildung $f\colon T_1 \to T_2$ stetig ist. Dann trägt T_1 die diskrete Topologie.

(b) Sei T_2 ein topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass für jeden topologischen Raum T_1 jede Abbildung $f\colon T_1 \to T_2$ stetig ist. Dann trägt T_2 die indiskrete Topologie.

Aufgabe I.9.16 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sei mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen und $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Produkttopologie (Aufgabe I.9.10). Dann ist die Abbildung

$$\text{add}\colon \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad (f,g) \mapsto f+g$$

stetig.

Aufgabe I.9.17 Seien R, S und T topologische Räume, und $S \times T$ werde mit der Produkttopologie versehen (Aufgabe I.9.10). Dann sind die Projektionen

$$p_1\colon S \times T \to S, \quad (s,t) \mapsto s,$$
$$p_2\colon S \times T \to T, \quad (s,t) \mapsto t$$

stetig, und die Produkttopologie ist die gröbste Topologie auf $S \times T$ mit dieser Eigenschaft. Eine Abbildung $f\colon R \to S \times T$ ist genau dann stetig, wenn $p_1 \circ f$ und $p_2 \circ f$ es sind.

Aufgabe I.9.18 Sei S ein topologischer Raum. Der Vektorraum $\ell^\infty(S)$ aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf S werde mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz, also

$$d(f,g) = \sup_{s\in S} |f(s) - g(s)|$$

versehen. Zeige, dass der Unterraum $C^b(S) = \{f \in \ell^\infty(S)\colon f \text{ stetig}\}$ abgeschlossen ist und dass die metrischen Räume $\ell^\infty(S)$ und $C^b(S)$ vollständig sind.

Aufgabe I.9.19 Betrachte $\mathbb{Z}$ mit der Topologie τ aus Beispiel I.2(e).

(a) $(\mathbb{Z}, \tau)$ ist ein Hausdorffraum.

(b) Gilt $2^n \to 0$ bzgl. τ? Gilt $n! \to 0$ bzgl. τ?

(c) Sei $m \in \mathbb{Z}$; dann ist die Abbildung $f_m\colon (\mathbb{Z},\tau) \to (\mathbb{Z},\tau)$, $f_m(n) = n+m$, ein Homöomorphismus.

(d) $(\mathbb{Z}, \tau)$ ist metrisierbar.

Aufgabe I.9.20 Die Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist nicht metrisierbar.
(Hinweis: Sonst gäbe es abzählbar viele Umgebungen von 0, der Nullfunktion, mit $\bigcap_{n=1}^\infty U_n = \{0\}$. Führe das zu einem Widerspruch.)

Aufgabe I.9.21 Betrachte auf $C(\mathbb{R})$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta (Beispiel I.2(g)). Zeige, dass eine Folge (f_n) genau dann gegen f konvergiert, wenn für alle kompakten Teilmengen $K \subset \mathbb{R}$

$$\sup_{t\in K} |f_n(t) - f(t)| \to 0.$$

Gilt das auch für Netze?

Aufgabe I.9.22 Ein topologischer Raum, in dem Grenzwerte konvergenter Netze eindeutig bestimmt sind, ist ein Hausdorffraum.

Aufgabe I.9.23 In einem Hausdorffraum sind endliche Mengen abgeschlossen, aber die Umkehrung gilt nicht.
(Tipp: Aufgabe I.9.2.)

Aufgabe I.9.24 Sei T das Produkt der topologischen Räume T_α, $\alpha \in \mathsf{A}$. Dann bilden die Projektionen $p_\beta\colon T \to T_\beta$ offene Mengen auf offene Mengen ab, aber im allgemeinen nicht abgeschlossene Mengen auf abgeschlossene Mengen.

Aufgabe I.9.25 In $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit der Produkttopologie liegt

$$\{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon\ f(t) = 0 \text{ für alle } t \text{ bis auf endlich viele}\}$$

dicht.

Aufgabe I.9.26 $\mathbb{R}$, versehen mit der Topologie aus Aufgabe I.9.2, ist kompakt.

Aufgabe I.9.27 Sei $T \subset [0,1]^{[0,1]}$ die Menge der monoton wachsenden Funktionen, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Dann ist T kompakt.

Aufgabe I.9.28 Beweise den Satz von Arzelà-Ascoli mit Hilfe des Satzes von Tikhonov gemäß folgender Anleitung. Für eine Funktion $\delta\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $\lim_{\varepsilon\to 0} \delta(\varepsilon) = 0$ und für $K > 0$ betrachte die Menge $M_{\delta,K}$ derjenigen Funktionen f auf S mit $\|f\|_\infty \le K$ und $\sup\{|f(s) - f(t)|\colon d(s,t) \le \delta(\varepsilon)\} \le \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Zeige, dass $M_{\delta,K}$ bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz kompakt ist und dass die identische Abbildung auf $M_{\delta,K}$ bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz und der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz stetig ist.

Aufgabe I.9.29 Sind alle T_α, $\alpha \in \mathsf{A}$, Hausdorffräume, so ist es auch ihr Produkt $\prod T_\alpha$.

Aufgabe I.9.30 Ein topologischer Raum T ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Funktion $f\colon T \to \{0,1\}$ konstant ist.

Aufgabe I.9.31
(a) $\mathbb{R}$, versehen mit der Topologie aus Aufgabe I.9.2, ist zusammenhängend.
(b) Die Sorgenfrey-Gerade (Aufgabe I.9.8) ist nicht zusammenhängend.

Aufgabe I.9.32 Sei T ein topologischer Raum.
(a) Ist $S \subset T$ zusammenhängend, dann auch $\overline{S}$.

(b) Sei $t \in T$. Die *Zusammenhangskomponente* $C(t)$ ist definiert als Vereinigung aller zusammenhängenden Teilmengen von T, die t enthalten. [Warum gibt es stets solch eine Teilmenge?] Zeige, dass $C(t)$ zusammenhängend und abgeschlossen ist.

(c) Ist $T \subset \mathbb{R}^d$ offen, so ist auch $C(t)$ offen.

Aufgabe I.9.33 Beweise Korollar I.6.7.

Aufgabe I.9.34 Der im Beweis von Satz I.7.1 konstruierte Raum ist zusammenhängend.

Aufgabe I.9.35 Betrachte $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ mit der Produkttopologie. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $T_a = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \colon f(t) \neq a$ für höchstens endlich viele $t\}$. Dann ist $T_0 \cup T_1$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Aufgabe I.9.36

(a) Zeige, dass $\mathbb{R}$ zu jedem offenen Teilintervall (a,b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, homöomorph ist.

(b) Ist $\mathbb{R}$ zu $[0,1)$ homöomorph? Zu $[0,1]$?

(c) Zeige, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$ nicht homöomorph sind.
(Tipp: $\mathbb{R} \setminus \{t\}$ ist stets unzusammenhängend. Übrigens sind $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ für $m \neq n$ nie homöomorph, der Beweis verlangt aber ganz andere und tieferliegende Hilfsmittel.)

Aufgabe I.9.37 Ein topologischer Raum T ist genau dann normal, wenn für alle $F \subset G \subset T$, F abgeschlossen, G offen, eine offene Menge O mit $F \subset O \subset \overline{O} \subset G$ existiert.

Aufgabe I.9.38 Ein abgeschlossener Unterraum eines normalen Raums ist normal (in der Relativtopologie).

Aufgabe I.9.39 Seien T ein normaler Raum, $A \subset T$ abgeschlossen und $f \colon A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert eine stetige Fortsetzung $F \colon T \to \mathbb{R}$.
(Tipp: Man kann Aufgabe I.9.36(a) mit Gewinn benutzen.)

Aufgabe I.9.40 Seien $f_n \colon T \to M$ stetige Funktionen auf einem topologischen Raum mit Werten in einem metrischen Raum (M,d); die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen die Funktion $f \colon T \to M$, d.h.

$$\sup_{t \in T} d(f_n(t), f(t)) \to 0.$$

Dann ist f stetig.

Aufgabe I.9.41 In einem normalen Hausdorffraum besitzt jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen. Gilt die Aussage auch in beliebigen Hausdorffräumen?

Aufgabe I.9.42 Eine Funktion $f \colon T \to \mathbb{R}$ auf einem topologischen Raum heißt *halbstetig von unten*, wenn $\{t \colon f(t) > r\}$ für jedes $r \in \mathbb{R}$ offen ist, und sie heißt *halbstetig von oben*, wenn $\{t \colon f(t) < r\}$ für jedes $r \in \mathbb{R}$ offen ist.

(a) Für welche Teilmengen $A \subset T$ ist die charakteristische Funktion χ_A halbstetig von unten bzw. von oben?

(b) $f\colon T \to \mathbb{R}$ ist genau dann halbstetig von unten, wenn für jedes konvergente Netz (t_i) aus $t_i \to t$ und $f(t_i) \le r$ auch $f(t) \le r$ folgt.

(c) $f\colon T \to \mathbb{R}$ ist genau dann halbstetig von unten, wenn f bezüglich der Topologie von $\mathbb{R}$ aus Aufgabe I.9.3 stetig ist.

(d) Ist T kompakt und $f\colon T \to \mathbb{R}$ halbstetig von unten, so ist f nach unten beschränkt und nimmt sein Infimum an.

Aufgabe I.9.43 Betrachte $\mathbb{N}$ mit der Topologie der ko-endlichen Mengen aus Aufgabe I.9.2. Zeige, dass dies ein kompakter Raum ist, der nicht Bairesch ist.

Aufgabe I.9.44 Eine G_δ-Teilmenge eines Baireraums ist selbst ein Baireraum.

Aufgabe I.9.45 Seien $T = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0)\colon x \notin \mathbb{Q}\}$ und $S = \mathbb{Q} \times \{0\}$, versehen mit der euklidischen Topologie. Dann ist T ein Baireraum, $S \subset T$ ist abgeschlossen, aber S ist kein Baireraum.

Aufgabe I.9.46 Gib ein Beispiel eines topologischen Raums, der von 2. Kategorie in sich, aber kein Baireraum ist.

Aufgabe I.9.47 Sei $O \subset \mathbb{R}^2$ offen und dicht. Zu $x \in \mathbb{R}$ setze $O_x = \{y \in \mathbb{R}\colon (x,y) \in O\}$. Dann ist $\{x \in \mathbb{R}\colon O_x \text{ ist dicht in } \mathbb{R}\}$ dicht in $\mathbb{R}$. Gilt die entsprechende Aussage auch für offene und dichte Teilmengen von $\mathbb{Q}^2$?

Aufgabe I.9.48 Gibt es eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Ableitung an keiner Stelle stetig ist?

Aufgabe I.9.49 Sei (f_n) eine punktweise beschränkte Folge stetiger Funktionen auf $[0,1]$. Dann existiert ein offenes Teilintervall von $[0,1]$, auf dem (f_n) gleichmäßig beschränkt ist.

Aufgabe I.9.50 Es sei $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass für alle $t \ge 0$ die Bedingung $\lim_{n\to\infty} f(nt) = 0$ gilt. Dann gilt auch $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$.

Aufgabe I.9.51 (Lokalkompakte Räume)
Ein topologischer Raum heißt *lokalkompakt*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt.

(a) $\mathbb{R}^n$ ist lokalkompakt.

(b) Der Raum $C[0,1]$ mit der Metrik der gleichmäßigen Konvergenz, also der Metrik der Supremumsnorm, ist nicht lokalkompakt.
(Überlege dazu, dass $f_n(t) = \varepsilon t^n$ eine Folge in $C[0,1]$ ohne gleichmäßig konvergente Teilfolge definiert.)

(c) Ein kompakter Hausdorffraum ist lokalkompakt.
(Verwende Aufgabe I.9.41.)

(d) Sei T ein lokalkompakter Hausdorffraum; ferner bezeichne ∞ einen nicht in T liegenden Punkt. Auf $\alpha T := T \cup \{\infty\}$ wird folgende Topologie τ definiert: $O \subset \alpha T$ sei offen, falls (1) $\infty \notin O$ und O eine offene Menge im Sinn der Topologie von T ist oder falls (2) $\infty \in O$ und $T \setminus O$ eine kompakte Teilmenge von T ist. Zeige, dass τ in der Tat eine Topologie ist und $(\alpha T, \tau)$ ein kompakter Hausdorffraum ist, für den die Relativtopologie auf T die Ausgangstopologie von T ist. T ist offen in αT, und genau dann liegt T dicht in αT, wenn T nicht kompakt ist. αT wird *Alexandrov-* oder *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von T genannt.

(e) Die Alexandrov-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$ ist homöomorph zur Kreislinie $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \|x\| = 1\}$, und allgemeiner ist die Alexandrov-Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ homöomorph zur n-Sphäre $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \|x\| = 1\}$.

(f) Was (wenn überhaupt) wäre in Teil (d) schiefgegangen, wenn T nicht als Hausdorffraum, und was, wenn T nicht als lokalkompakt vorausgesetzt wäre?

(g) Ein lokalkompakter Hausdorffraum ist ein Baireraum.

I.10 Literaturhinweise

Einführungen in die mengentheoretische Topologie findet man in:

- R. B. Ash: *Real Analysis and Probability.* Academic Press, 1972.
- G. Pedersen: *Analysis Now.* Springer, 1989.
- M. Reed, B. Simon: *Functional Analysis.* 2. Auflage, Academic Press, 1980.

Einige ausführliche Darstellungen:

- J. Dugundji: *Topology.* Allyn and Bacon, 1966.
- K. Jänich: *Topologie.* 4. Auflage, Springer, 1994.
- J. L. Kelley: *General Topology.* Van Nostrand, 1955; Nachdruck Springer, 1975.
- B. von Querenburg: *Mengentheoretische Topologie.* 3. Auflage, Springer, 2001.
- V. Runde: *A Taste of Topology.* Springer, 2005.
- A. Wilansky: *Topology for Analysis.* Wiley, 1970.
- S. Willard: *General Topology.* Addison-Wesley, 1970.

Eher für Spezialisten:

- R. Engelking: *General Topology.* Heldermann, 1989.
- L. A. Steen, J. A. Seebach: *Counterexamples in Topology.* 2. Auflage, Springer, 1979.

http://www.springer.com/978-3-540-79599-5

Einführung in die höhere Analysis
Topologische Räume, Funktionentheorie, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Maß- und Integrationstheorie, Funktionalanalysis Index.- Literaturverzeichnis.
Werner, D.
2009, X, 388 S. 13 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-540-79599-5