2 Modellieren von einfachen Zufallsexperimenten

2.1 Zielsetzung

In diesem Kapitel lernen wir, Zufallsexperimente mathematisch zu modellieren. Im Zentrum unseres Interesses liegen die fundamentalen Regeln des Rechnens mit Wahrscheinlichkeiten, die es uns ermöglichen, aus bekannten Tatsachen über ein Zufallsexperiment die fehlenden Informationen zu berechnen und somit auch Vorhersagen über das Verhalten eines Zufallsexperimentes in einer langen Folge von Wiederholungen zu treffen.

2.2 Erste Beschreibung

Wiederholen wir zunächst die grundlegenden Begriffe, die wir in Kap. 1 eingeführt haben. Betrachten wir nochmals das Werfen eines Würfels. Es gibt sechs mögliche Resultate, auch **Ergebnisse** genannt, die wir einfach mit den Zahlen von 1 bis 6 bezeichnen und die die Anzahl der Augen der Würfeloberseite angeben. Wir fassen diese Ergebnisse nun zu einer Menge zusammen:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Die Menge S nennen wir den **Ergebnisraum** des Würfelns. Der Ergebnisraum eines Zufallsexperiments enthält alle möglichen Resultate des Zufallsexperiments. Beim Würfeln sind es offensichtlich die sechs Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6.

Betrachten wir das gleichzeitige Werfen eines Würfels und einer Münze. Das ist ein Zufallsexperiment, das aus den zwei Zufallsexperimenten des Würfelns und des Münzwurfs zusammengesetzt ist. Für das Würfeln haben wir die Resultate 1, 2, 3, 4, 5 und 6, beim Münzwurf sind die Resultate K (Kopf) und Z (Zahl). Die möglichen Resultate des zusammengesetzten Experiments sind alle Kombinationen der Resultate der zwei Basisexperi-

M. Barot, J. Hromkovič, *Stochastik*, Grundstudium Mathematik,
DOI 10.1007/978-3-319-57595-7_2

mente. Somit ist der Ergebnisraum des zusammengesetzten Experiments

$$S = \{(\mathrm{K}, 1), \quad (\mathrm{K}, 2), \quad (\mathrm{K}, 3), \quad (\mathrm{K}, 4), \quad (\mathrm{K}, 5), \quad (\mathrm{K}, 6), \\ (\mathrm{Z}, 1), \quad (\mathrm{Z}, 2), \quad (\mathrm{Z}, 3), \quad (\mathrm{Z}, 4), \quad (\mathrm{Z}, 5), \quad (\mathrm{Z}, 6)\}.$$

Mit (K, 3) beschreiben wir zum Beispiel das Resultat (das Ergebnis) des zusammengesetzten Experiments, in dem die Augenzahl 3 und Kopf gefallen sind.

Aufgabe 2.1 ✓ Bestimme die Ergebnisräume für die folgenden einfachen und zusammengesetzten Experimente. Die Darstellung der einzelnen Resultate darfst du dir aussuchen, doch vergiss nicht, deine Wahl zu kommentieren.

(a) Roulettespiel im Casino.
(b) Es werden drei Münzen, eine 1-CHF-, eine 1-EUR- und eine 1-NOK-Münze (1 norwegische Krone), auf einmal geworfen.
(c) Es wird mit zwei Würfeln, einem roten und einem blauen, gewürfelt.
(d) Drei Fußballspiele werden gleichzeitig gespielt. Dabei sind die Unterschiede zwischen den Mannschaften so klein, dass man für keine ausschließen kann, dass sie gewinnt.

Kehren wir jetzt zu dem einfachen Würfeln zurück. Bei einem fairen Würfel erwarten wir, dass jede Augenzahl genauso häufig vorkommt wie jede andere. Somit erwartet man, dass bei vielen Wiederholungen des Experiments jede Augenzahl in einem Sechstel der Fälle auftritt.

Die Wahrscheinlichkeit jedes elementaren Ereignisses setzen wir gleich $\frac{1}{6}$. Wenn wir die Wahrscheinlichkeit des elementaren Ereignisses i mit $P(i)$ bezeichnen, so gilt

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}.$$

Auszug aus der Geschichte

Die Herstellung von fairen Würfeln ist gar nicht so einfach. In Spielcasinos ist es sehr wichtig, dass die Würfel wirklich fair sind. Diese werden daher recht aufwendig hergestellt, aus einem durchsichtigen Material, damit Lufteinschlüsse erkannt werden können. Die Vertiefungen für die Augen werden ausgefräst und dann mit einem Material anderer Farbe aber gleicher Dichte aufgefüllt, um zu vermeiden, dass die Seite mit der Augenzahl „6“ leichter ist als die Seite mit der Augenzahl „1“. Gezinkte Würfel sind so konstruiert, dass eine Seite schwerer ist und somit eine erhöhte Wahrscheinlichkeit besitzt, unten zu landen.

In der Theorie geht man von einem „absolut fairen“ Würfel aus, der auch **Laplace-Würfel** genannt wird, nach dem französischen Mathematiker Pierre Simon Laplace (1749–1827).

Wir dürfen P als eine Funktion (eine Abbildung) von S nach $[0, 1]$ betrachten, weil P jedem Element aus S seine Wahrscheinlichkeit aus $[0, 1]$ zuordnet. Graphisch kann man dies wie in Abb. 2.1a oder Abb. 2.1b darstellen. Die Darstellung in Abb. 2.1b nennen wir Histogramm (oder Säulendiagramm).

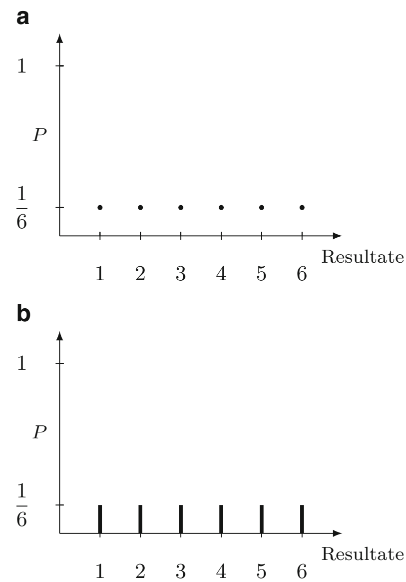

Abb. 2.1 Histogramm (oder Säulendiagramm) der Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln

Weil S eine endliche Menge ist, entsteht bei ihrer graphischen Darstellung keine Kurve, sondern nur eine endliche Menge von Punkten. Eine andere graphische Darstellung der Abbildung P ist in Abb. 2.2 gezeigt.

Das Paar (S, P) **modelliert** das Experiment des Würfelns mathematisch. Die Menge S gibt an, welche Ergebnisse möglich sind und die Abbildung P gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten die einzelnen Ergebnisse dabei auftreten. Die Funktion P kann allerdings nicht völlig beliebig gewählt werden, denn es muss ja auch gelten, dass mit

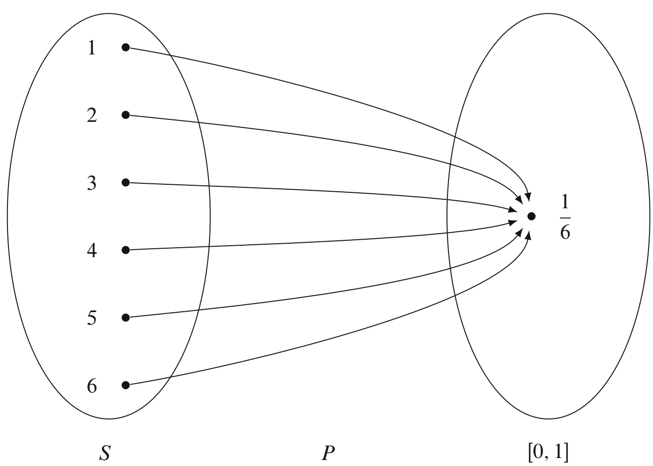

Abb. 2.2 Darstellung der Wahrscheinlichkeitsfunktion P beim einfachen Würfeln

Sicherheit eines der Ergebnisse auftritt. Somit muss die Summe der prozentualen Anteile aller möglichen Resultate genau 100 % sein, in anderen Worten: Die Summe der Wahrscheinlichkeiten $P(s)$ aller Ergebnisse s muss gleich 1 sein. In unserem Fall des Würfelns mit $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ bedeutet dies, dass

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

gelten muss. In der folgenden Definition ist dies nochmals zusammengefasst und mit Bezeichnungen versehen.

Hinweis 2.1

Die folgende Definition soll nicht die formale mathematische Definition eines Wahrscheinlichkeitsraums einführen. Sie ist lediglich der erste Schritt zur mathematischen Definition. Die Axiome von Kolmogorov müssen zunächst in weiteren Schritten als etwas Natürliches entdeckt werden, das in jedem Modell eines Zufallsexperiments gelten muss. Erst dann folgt die vollständige Definition.

Begriffsbildung 2.1 *Einen (endlichen)* ***Wahrscheinlichkeitsraum*** *als Modell eines Zufallsexperiments beschreiben wir als ein Paar*

$$\Omega = (S, P),$$

wobei S eine endliche Menge (der Ergebnisraum des Zufallsexperiments) und P eine Funktion $P\colon S \to \mathbb{R}$ ist, welche folgende beiden Eigenschaften erfüllt:

- $0 \leq P(s) \leq 1$ *für alle s aus S und*
- *die Summe der Wahrscheinlichkeiten $P(s)$ aller Ergebnisse aus S ist* 1.

Die Elemente aus S nennt man ***Ergebnisse*** *oder* ***Resultate****, die Menge S selbst nennt man den* ***Ergebnisraum*** *oder die* ***Ergebnismenge****. Ist s ein Ergebnis, so nennt man den Wert* $\boldsymbol{P(s)}$ *die* ***Wahrscheinlichkeit*** *von s und die Funktion P selbst nennt man die* ***Wahrscheinlichkeitsfunktion*** *oder auch die* ***Wahrscheinlichkeitsverteilung*** *über S.*

Hinweis 2.2

Aufgrund der Tatsache, dass elementare Ereignisse auch Ereignisse und somit Mengen von Ergebnissen, also Teilmengen des Ergebnisraumes sind, sollte man die elementaren Ereignisse strikt formal als $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ und $\{6\}$ bezeichnen anstatt die Notation mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6 zu verwenden. Entsprechend müsste man auch $P(\{1\}) = \frac{1}{6}$ statt $P(1) = \frac{1}{6}$ schreiben. Wir haben bei der Notation von elementaren Ereignissen auf die Mengenklammern verzichtet, weil bei der Arbeit mit ausschließlich elementaren Ereignissen noch kein Bedarf dafür erkennbar ist. Dieser Wahl muss man aber nicht folgen, die Entscheidung liegt bei der Lehrperson.

Hinweis 2.3

Allgemein modelliert man einen Wahrscheinlichkeitsraum als ein Tripel (S, Σ, P), wobei Σ eine σ-Algebra ist. Σ enthält also einige Teilmengen aus S, insbesondere immer die leere Menge, und ist abgeschlossen bezüglich Komplementbildung und abzählbarer Vereinigung. Wir brauchen Σ hier aber nicht zu betrachten, da Σ immer der Potenzmenge $\mathrm{Pot}(S)$ von S (also der Menge aller Ereignisse) entspricht, falls S endlich ist. Aus diesem Grund bleiben wir in diesem Buch bei der Modellierung durch ein Paar (S, P). Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P ist im Grunde aber eine Funktion von $\mathrm{Pot}(S)$ nach $[0, 1]$ und nicht von P, wie wir es eingeführt haben.

Dies tun wir aus didaktischen Gründen, da für die Bestimmung von $P\colon \mathrm{Pot}(S) \to [0, 1]$ zunächst gelernt werden muss, $P(E)$ für ein Ereignis E aus den Wahrscheinlichkeiten $P(e)$ der einzelnen Ergebnisse e in E zu berechnen. Erst wenn dieses axiomatische Vorgehen erkannt wurde, kann eine exakte formale Definition angeboten werden.

Beispiel 2.1 Betrachten wir den Münzwurf mit zwei Münzen, wobei wir zwischen den Münzen unterscheiden. Wir nennen sie die erste und die zweite Münze. Der Ergebnisraum ist dann

$$S = \{(\text{Kopf}, \text{Kopf}), (\text{Kopf}, \text{Zahl}), (\text{Zahl}, \text{Kopf}), (\text{Zahl}, \text{Zahl})\},$$

wobei das Paar (a, b) folgende Bedeutung hat:

(a, b)

das Ergebnis bei der ersten Münze

das Ergebnis bei der zweiten Münze

Damit sind $E_1 = (\text{Kopf}, \text{Zahl})$ und $E_2 = (\text{Zahl}, \text{Kopf})$ unterschiedliche Ergebnisse, weil bei E_1 die erste Münze Kopf und die zweite Münze Zahl zeigt, während es bei Ergebnis E_2 genau umgekehrt ist.

Wenn beide Münzen **fair** sind, was bedeutet, dass bei beiden die zwei Ergebnisse Kopf und Zahl gleich wahrscheinlich sind, so haben alle vier Ergebnisse des Doppelmünzwurfs die gleiche Wahrscheinlichkeit, das heißt, dass

$$P\big((\text{Kopf}, \text{Kopf})\big) = P\big((\text{Kopf}, \text{Zahl})\big) = P\big((\text{Zahl}, \text{Kopf})\big) = P\big((\text{Zahl}, \text{Zahl})\big) = \frac{1}{4}$$

gilt.

Dass es tatsächlich so ist, dass alle vier elementaren Ereignisse gleich wahrscheinlich sind, ist zunächst vielleicht gar nicht so offensichtlich. Eine Möglichkeit, dies mit unserem Wissensstand zu überprüfen, ist es, das Zufallsexperiment viele Male zu wiederholen und dann zu schauen, ob alle vier Resultate ungefähr gleich oft vorkommen. Eine andere Möglichkeit ist die folgende Überlegung: Man wirft die Münzen nicht gleichzeitig, sondern nacheinander. Nehmen wir einmal an, die erste Münze zeige Kopf. Weil sie fair ist, passiert dies mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$. Somit müssen die zwei Ergebnisse (Kopf, Zahl) und (Kopf, Kopf) mit dem ersten Resultat Kopf zusammen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben, also

$$P\big((\text{Kopf}, \text{Zahl})\big) + P\big((\text{Kopf}, \text{Kopf})\big) = \frac{1}{2}. \tag{2.1}$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten für die zweite Münze und da diese auch fair ist, sollten beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, das heißt,

$$P\big((\text{Kopf}, \text{Zahl})\big) = P\big((\text{Kopf}, \text{Kopf})\big). \tag{2.2}$$

Aus (2.1) und (2.2) folgt unmittelbar

$$P\big((\text{Kopf}, \text{Zahl})\big) = P\big((\text{Kopf}, \text{Kopf})\big) = \frac{1}{4}. \qquad \diamondsuit$$

Aufgabe 2.2 Bei der Geburt der Wahrscheinlichkeitstheorie haben die Wissenschaftler irrtümlicherweise (Kopf, Zahl) und (Zahl, Kopf) als ein Ergebnis „eine Zahl, ein Kopf“ betrachtet. Dadurch wurden nur drei Ergebnisse, nämlich „beide Kopf“, „beide Zahl“ und „eine Zahl, ein Kopf“ in Betracht gezogen. Die Wissenschaftler erhielten mit diesem Modell daher die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ für jedes Ergebnis. Durch die relative Häufigkeit beim Experimentieren entdeckte man, dass dieses Modell nicht mit der Realität übereinstimmt und man ging zum Modell aus Beispiel 2.1 über. Überprüfe die Richtigkeit der Entscheidung, indem du 50 Mal zwei unterschiedliche Münzen[1] wirfst und eine Tabelle mit vier Zeilen führst, wo für alle vier Ergebnisse die Häufigkeiten aufgezeichnet werden.

Aufgabe 2.3 ✓ Betrachte das Experiment Würfeln mit zwei Würfeln, wobei ein Würfel weiß und der andere rot ist. Bestimme den Ergebnisraum und die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse, vorausgesetzt, die Würfel sind fair.

Aufgabe 2.4 Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse des zusammengesetzten Experiments des gleichzeitigen Münzwurfs und Würfelns.

Auszug aus der Geschichte

Als Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung (zuerst hieß sie nämlich so und nicht Wahrscheinlichkeitstheorie, wie man sie heute nennt) gilt ein Briefwechsel zwischen zwei französischen Mathematikern: Pierre de Fermat (1607–1665) und Blaise Pascal (1623–1662). Darin wurde folgende Frage erörtert, die als *Teilungsproblem* bekannt ist: Bei einem Spiel zwischen zwei Teilnehmern wird so lange gespielt, bis der erste p Punkte erreicht. Dieser gewinnt dann alles Geld. Nun wird aus gewissen Gründen vorzeitig beim Spielstand $a : b$ abgebrochen. Spieler A hat also a Punkte und Spieler B hat b Punkte erzielt mit $a < p$ und $b < p$. Die Frage lautet nun: Wie ist der Gewinn gerecht aufzuteilen? Damit die Frage geklärt werden kann, muss zunächst erörtert werden, was denn unter dem Begriff „gerecht“ verstanden werden soll.

[1] Zum Beispiel eine 1-Euro-Münze und eine 50-Cent-Münze.

Diese Fragestellung ist aber noch einiges älter. Man kann sie bis ins Jahr 1494 zurückverfolgen. Bezeichnend ist jedoch, dass Pascal die Frage als erster so beantwortet hat, wie man es auch heute noch als korrekt ansieht. Wir besprechen seine Lösung in Kap. 5 ausführlich.

In Kap. 1 haben wir schon angedeutet, dass wir die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse studieren wollen und dass ein Ereignis eine beliebige Teilmenge des Ergebnisraums ist. Deswegen wiederholen wir nun einige Grundlagen aus der Mengenlehre, bevor wir lernen, die Wahrscheinlichkeiten von einzelnen Ereignissen auszurechnen.

2.3 Grundlagen der Mengenlehre

Hinweis 2.4

Um die Grundeigenschaften von Wahrscheinlichkeitsräumen zu untersuchen, benötigen wir die Grundbegriffe der Mengenlehre. Dies ist insbesondere wichtig, da Ereignisse (zum Beispiel eine gerade Augenzahl beim Würfeln) nichts anderes als Mengen von Ergebnissen und somit Teilmengen des Ergebnisraumes sind. Das hier angestrebte Verständnis für Mengen ist unverzichtbar für das Verständnis des Rechnens mit Wahrscheinlichkeiten in einem Wahrscheinlichkeitsraum. Der Teil „Grundlagen der Mengenlehre“ kann nach einer Überprüfung des Vorwissens übersprungen werden, falls das Thema schon vollständig behandelt wurde.

Als **Menge** betrachten wir einfach jede mögliche Ansammlung von unterscheidbaren Objekten.[2] Die Objekte, die zu einer Menge M gehören, heißen **Elemente** von M.

Beispiel 2.2 (Mengen)

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.
- $\{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ ist die Menge, die die zwei Elemente Kopf und Zahl enthält.
- $A = \{x, y, z\}$ enthält drei Elemente x, y und z.
- Die Menge aller Schüler einer Klasse. Jeder Schüler ist ein Element und kann durch seinen Namen bezeichnet werden. Wenn zwei Schüler den gleichen Namen haben, muss man für sie eine Bezeichnung einführen, die es ermöglicht, sie zu unterscheiden.
- Die Menge aller Planeten im Universum.
- Die Menge aller in Zürich registrierten Fahrzeuge.
- Die Menge aller englischen Wörter im Oxford Dictionary.
- $A = \{2, 7, 9, \text{Jan}, \text{Peter}, \text{Eiffelturm}\}$ ist eine Menge, welche die sechs Elemente 2, 7, 9, Jan, Peter und Eiffelturm enthält. Es ist erlaubt, dass die Elemente einer Menge sehr unterschiedlicher Natur sind. $\diamondsuit$

[2] Diese Definition ist für unsere Ansprüche völlig ausreichend. Die Mathematiker zu Beginn des 20. Jahrhunderts haben jedoch gemerkt, dass sie so nicht in allen Fällen haltbar ist, denn sie führt zu unlösbaren Widersprüchen.

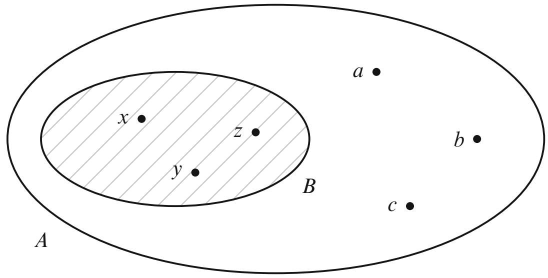

Abb. 2.3 Graphische Darstellung der Teilmenge $B = \{x, y, z\}$ der grösseren Menge $A = \{a, b, c, x, y, z\}$

Die Ansammlung $\{1, 2, 1, 3, 1\}$ ist keine Menge, weil in den Klammern 3 Mal das Element 1 vorkommt. Jedes Element kann in einer Menge nur einmal vorkommen, entweder ist es da oder nicht. Ein mehrfaches Vorkommen ist nicht erlaubt. Die Reihenfolge der Elemente einer Menge ist hingegen irrelevant. So bezeichnen $\{2, 3, 5\}$ und $\{5, 2, 3\}$ beispielsweise dieselbe Menge.

Wenn x in einer Menge A vorkommt, dann schreiben wir

$$\boldsymbol{x \in A},$$

was als

x* gehört zu *A oder ***x* ist in *A*** oder ***A* enthält *x***

gelesen wird. Die **leere Menge {}** ist eine Menge, die kein Element enthält. Wir bezeichnen sie auch mit dem Symbol $\boldsymbol{\emptyset}$.

Eine Menge B ist eine **Teilmenge** einer Menge A, wenn jedes Element aus B auch ein Element von A ist. Wir notieren dies als

$$\boldsymbol{B \subseteq A}.$$

Abb. 2.3 zeigt eine Menge $B = \{x, y, z\}$, die eine Teilmenge der Menge $A = \{a, b, c, x, y, z\}$ ist.

Für jede Menge A gilt $\emptyset \subseteq A$.

Jetzt zählen wir alle Teilmengen von B auf:

$$\emptyset, \quad \{x\}, \quad \{y\}, \quad \{z\}, \quad \{x, y\}, \quad \{x, z\}, \quad \{y, z\}, \quad \{x, y, z\}.$$

Wir sehen, dass unsere Aufzählung systematisch ist. Zuerst kommt die leere Menge $\emptyset$, die kein Element enthält. Danach kommen alle Mengen, die jeweils genau ein Element enthalten, usw.

Aufgabe 2.5 ✓ Nenne drei unterschiedliche Teilmengen von $\mathbb{N}$.

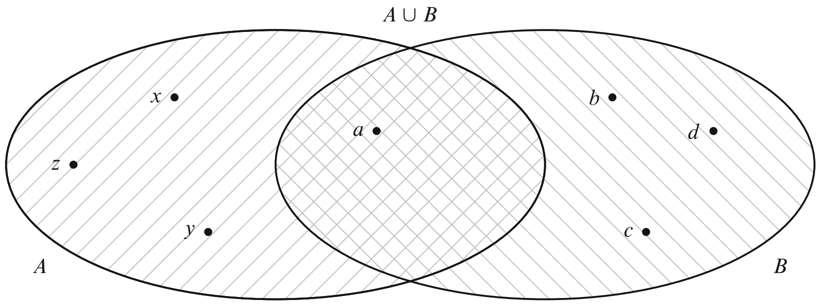

Abb. 2.4 Graphische Darstellung der Vereinigungsmenge $A \cup B$ der zwei Mengen $A = \{a, x, y, z\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$

Aufgabe 2.6 ✓ Nenne alle Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$.

Hinweis Es gibt genau $2^4 = 16$ davon.

Aufgabe 2.7 ✓ Nenne alle 4-elementigen Teilmengen der Menge $\{a, b, c, d, e\}$.

Die **Vereinigung** von zwei Mengen A und B,

$$\boldsymbol{A \cup B},$$

ist die Menge aller Elemente, die in A *oder* in B sind. Das „oder" ist hierbei nicht ausschließend zu verstehen, wie es in der Mathematik üblich ist. Ein Element liegt also auch in der Vereinigung $A \cup B$, wenn es sowohl in A als auch in B liegt.

In Abb. 2.4 ist $A = \{x, y, z, a\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$. Damit ist

$$A \cup B = \{a, b, c, d, x, y, z\}.$$

Bemerke, dass das Element a in beiden Mengen A und B liegt, aber a deswegen nicht zweimal in $A \cup B$ aufgeführt wird. Jedes Element darf in einer Menge nur einmal auftreten. Obwohl A und B beide genau vier Elemente enthalten, besteht $A \cup B$ also nicht aus acht, sondern in diesem Fall nur aus sieben Elementen.

Im Folgenden bezeichnen wir durch

$$\boldsymbol{|A|}$$

die Anzahl der Elemente in A (auch oft als Kardinalität von A bezeichnet). Somit ist

$$\begin{aligned} \big|\{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}\big| &= 2, \\ \big|\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\big| &= 6, \\ |\emptyset| &= 0. \end{aligned}$$

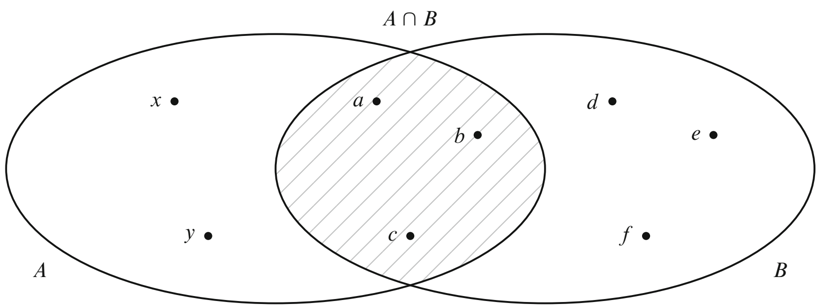

Abb. 2.5 Graphische Darstellung der Schnittmenge $A \cap B$ der zwei Mengen $A = \{a, b, c, x, y\}$ und $B = \{a, b, c, d, e, f\}$

Beispiel 2.3 Wir haben die folgende Aufgabenstellung. Finde zwei konkrete Mengen A und B, sodass $|A \cup B| = 5$, $|A| = 4$ und $|B| = 3$.

Man kann wie folgt vorgehen. Wir wählen zuerst $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ mit fünf Elementen. Vier von diesen fünf Elementen müssen die Menge A formen. Wir wählen zum Beispiel $A = \{a, b, c, d\}$. Das Element e ist nicht in A, aber in $A \cup B$ und somit muss e in B sein. B muss aber insgesamt 3 Elemente haben, also müssen wir noch zwei weitere Elemente aus $A \cup B$ dazu nehmen. Welche wir konkret wählen, spielt keine Rolle. Wir könnten beispielsweise $B = \{e, a, b\}$ wählen. $\diamondsuit$

Aufgabe 2.8 ✓ Finde jeweils zwei konkrete Mengen A und B, sodass Folgendes gilt.

(a) $|A| = 3, |B| = 3$ und $|A \cup B| = 6$,
(b) $|A| = 4, |B| = 3$ und $|A \cup B| = 5$,
(c) $|A| = 5, |B| = 3$ und $|A \cup B| = 5$.

Der **Schnitt** von zwei Mengen A und B,

$$\boldsymbol{A \cap B},$$

enthält genau diejenigen Elemente, welche in A *und* in B sind (Abb. 2.5).

Wenn zum Beispiel $A = \{x, y, a, b, c\}$ und $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ ist, dann ist

$$A \cap B = \{a, b, c\},$$

weil $a \in A$ und $a \in B$, $b \in A$ und $b \in B$, $c \in A$ und $c \in B$ und kein anderes Element zu beiden Mengen A und B gehört.

Aufgabe 2.9 ✓ Bestimme die Schnitte $A \cap B$ der folgenden Mengen A und B.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$,
(b) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
(c) $A = \emptyset$, $B = \{1, 2, 3\}$,
(d) $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$.

Aufgabe 2.10 ✓ Finde zwei Mengen A und B, sodass Folgendes gilt.

(a) $|A| = 3$, $|B| = 4$ und $|A \cap B| = 2$,
(b) $|A| = 4$, $|B| = 2$ und $|A \cap B| = 0$,
(c) $|A| = 3$, $|B| = 5$ und $|A \cap B| = 3$.

Aufgabe 2.11 ✓ Seien A und B zwei Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$. Begründe, warum dies so ist.

Wir sagen, dass zwei Mengen A und B **gleich** (oder **identisch**) sind, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$ gilt. Dies schreibt man

$$\boldsymbol{A = B}.$$

In anderen Worten: Es gilt $A = B$, falls jedes Element aus A auch in B liegt und jedes Element aus B auch in A liegt.

Aufgabe 2.12 ✓ Sei $A \subseteq B$. Dann gilt

$$A \cap B = A.$$

Erkläre, warum dies so ist.

Aufgabe 2.13 Finde drei Mengen A, B und C mit folgenden Eigenschaften. Es können viele Mengen mit diesen Eigenschaften existieren. Es reicht, eine von diesen Möglichkeiten anzugeben.

(a) $|A| = 2$, $|B| = 1$, $|C| = 5$, $|A \cup B \cup C| = 6$ und $B \subseteq A$.
(b) $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, $|A \cup B \cup C| = 7$, $|A \cup B| = 5$, $|C| = 2$.
(c) $A \cap B = \emptyset$, $|A| = 2$, $|B| = 3$, $|C| = 5$, $|A \cup B \cup C| = 5$.

Aufgabe 2.14 ⋆✓ Erkläre, warum die folgende Gleichung für alle Mengen A und B gilt:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Teste die Gültigkeit zuerst für die Mengen A und B aus Aufgabe 2.10.

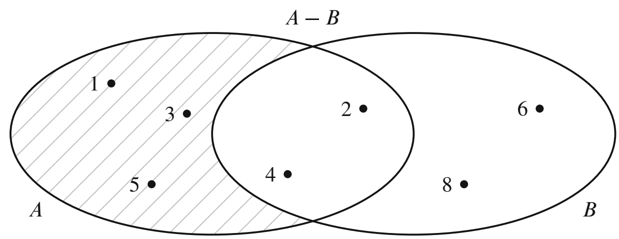

Abb. 2.6 Graphische Darstellung der Differenz $A - B$ der zwei Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{2, 4, 6, 8\}$

Die **Differenz** zweier Mengen A und B, geschrieben

$$\boldsymbol{A - B},$$

ist die Menge aller Elemente aus A, die *nicht* in B vorhanden sind.

Zum Beispiel gilt für $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $B = \{2, 4, 6, 8\}$

$$A - B = \{1, 3, 5\},$$

weil 1, 3 und 5 in A sind, aber nicht in B (Abb. 2.6).

Analog gilt

$$B - A = \{6, 8\}.$$

Aufgabe 2.15 ✓ Bestimme $A - B$ und $B - A$ für die folgenden Mengen A und B.

(a) $A = \{a, b, c, d, f\}$, $B = \{c, d, f, e, h, g\}$,
(b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \emptyset$,
(c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2, 3\}$,
(d) $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $B = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ ist die Menge aller geraden natürlichen Zahlen.

Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt**, wenn

$$\boldsymbol{A \cap B = \emptyset},$$

wenn sie also kein gemeinsames Element enthalten.

Aufgabe 2.16 ✓ Begründe, warum für zwei beliebige disjunkte Mengen A und B gilt, dass

(a) $A - B = A$ und
(b) $B - A = B$.

Aufgabe 2.17 Begründe, warum für beliebige Mengen A und B gilt, dass

(a) $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ und
(b) $|A \cup B| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A|$.

Aufgabe 2.18 Begründe, warum für beliebige Mengen A und B gilt, dass

(a) $A - B = A - (A \cap B)$ und
(b) $|A - B| = |A| - |A \cap B|$.

Aufgabe 2.19 ✓ Für welche Mengen A und B gilt $|A \cup B| = |A|$? Begründe deine Antwort und gib ein Beispiel an.

Aufgabe 2.20 Nutze die graphische Darstellung von Mengen wie in Abb. 2.6, um folgende Mengen darzustellen:

(a) $(A \cup B) \cap A$,
(b) $(A - B) \cup (B - A)$,
(c) $(A \cup B) - (A \cap B)$,
(d) $(A - B) \cup (A \cap B)$,
(e) $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$,
(f) $(A - B) \cup B$.

Ergeben einige dieser sechs Beschreibungen von Mengen die gleiche Menge?

Auszug aus der Geschichte
Begründet wurde die Mengentheorie durch Georg Cantor (1845–1918) Ende des 19. Jahrhunderts. Die Abb. 2.7 zeigt Georg Cantor mit etwa 60 Jahren.

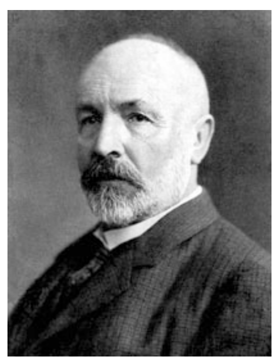

Abb. 2.7 Georg Cantor (1845–1918)

2.4 Ereignisse als Teilmengen des Ergebnisraumes

In der Wahrscheinlichkeitstheorie betrachten wir die Menge S aller Ergebnisse eines Zufallsexperiments als eine Obermenge. Alle anderen Mengen A, B usw., die vorkommen, sind Teilmengen von S. Diese Situation zeichnen wir wie in Abb. 2.8.

S stellt die ganze eingerahmte Fläche dar und A und B sind als Kreisflächen gezeichnet. Diese Einführung einer Obermenge S, die alles enthält, ermöglicht es uns, den folgenden neuen Begriff einzuführen. Für jede Teilmenge A von S ($A \subseteq S$) ist die **komplementäre Menge $\overline{A}$ zu A bezüglich S** die Menge

$$\boldsymbol{\overline{A} = S - A}.$$

Die Menge $\overline{A} = S - A$ ist in Abb. 2.9 gezeichnet. Wir verwenden manchmal auch die Notation $\overline{A \cap B}$, um $S - (A \cap B)$ zu bezeichnen.

Beispiel 2.4 Unsere Aufgabe ist es, graphisch die Menge $(\overline{\overline{A} \cap B}) - A$ darzustellen. Wir erreichen dies schrittweise, indem wir eine Folge von Bildern generieren. Wenn man unterschiedliche Farben oder Schraffierungen verwendet, kann die Entwicklung auch in einer Graphik dargestellt werden. Die Menge $\overline{A} = S - A$ ist in Abb. 2.9 dargestellt. In Abb. 2.10 ist die Menge $\overline{A} \cap B$ gezeichnet. Wir sehen, dass dies die Menge $B - A$ ist.

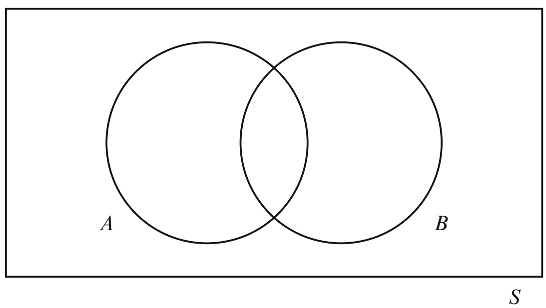

Abb. 2.8 Schematische Darstellung von zwei Teilmengen A, B der Ergebnismenge S

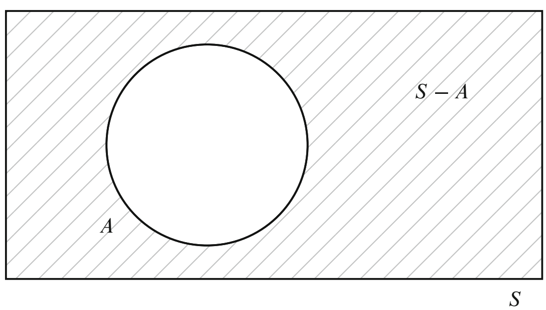

Abb. 2.9 Schematische Darstellung der Komplementärmenge $\overline{A} = S - A$ einer Teilmenge A von S

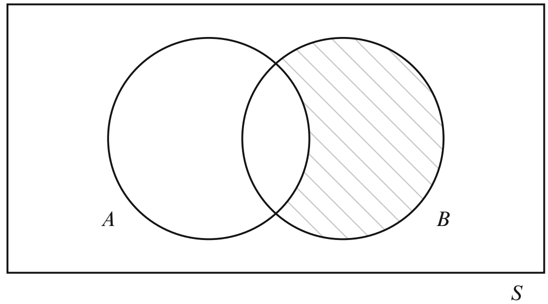

Abb. 2.10 Darstellung der Menge $\overline{A} \cap B$

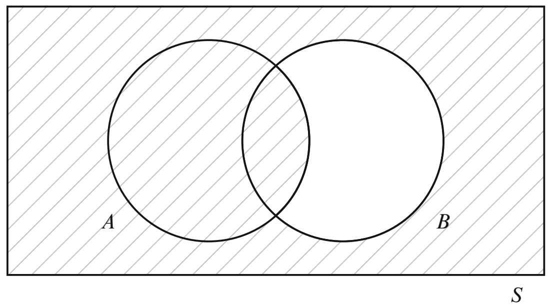

Abb. 2.11 Die Menge $\overline{\overline{A} \cap B}$

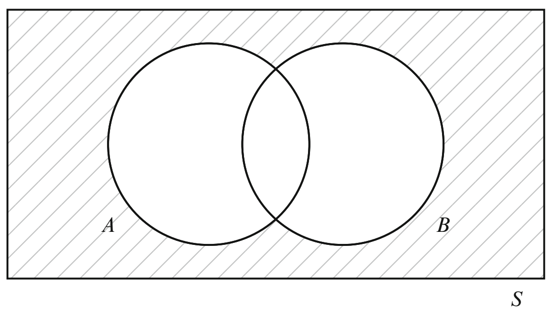

Abb. 2.12 Die Menge $(\overline{\overline{A} \cap B}) - A$

Um die Menge $\overline{\overline{A} \cap B} = S - (\overline{A} \cap B)$ darzustellen, müssen wir alles außer dem in Abb. 2.10 schraffierten Bereich nehmen. nehmen. Somit erhalten wir die Darstellung von $\overline{\overline{A} \cap B}$ in Abb. 2.11.

Wenn wir aus der Menge $\overline{\overline{A} \cap B}$ alle Elemente aus A herausnehmen, erhalten wir schließlich die gesuchte Menge $(\overline{\overline{A} \cap B}) - A$ in Abb. 2.12. Wir beobachten, dass man diese Menge auch einfacher beschreiben kann, nämlich als $S - (A \cup B) = \overline{A \cup B}$. ◊

Auszug aus der Geschichte

Diagramme, wie wir sie in Abb. 2.10, 2.11 oder 2.12 sehen, wurden durch den englischen Mathematiker John Venn (1834–1923) eingeführt. Die Abb. 2.13 zeigt ein Porträt von Venn. Venn war ein Logiker und unterrichtete auch Wahrscheinlichkeitstheorie an der Universität Cambridge. 1866 schrieb er das Buch *Logic of Chance*, welches als originell und wichtig für die Statistik eingestuft wurde.

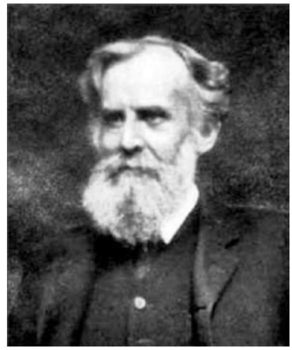

Abb. 2.13 John Venn (1834–1923)

Aufgabe 2.21 Bestimme mit Hilfe von Graphiken wie in Abb. 2.8 bis 2.12 die folgenden Mengen.

(a) $A \cap \overline{B}$,
(b) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)$,
(c) $(\overline{A \cap B}) \cap A$,
(d) $\overline{A \cup B}$,
(e) $\overline{A - B}$,
(f) $\overline{(B - A) \cup (S - B)}$,
(g) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = S - (\overline{A} \cup \overline{B})$.

Aufgabe 2.22 Welche der folgenden Mengenbeschreibungen stellen die gleiche Menge dar?

(a) $A - B$,
(b) $B - A$,
(c) $A \cap \overline{B}$,
(d) $S \cap (\overline{A} \cap B)$,
(e) $(\overline{B} \cap A) - (A \cap B)$,
(f) $(S - (\overline{A} \cap \overline{B})) - B$.

Hinweis 2.5
Die folgenden Aufgaben über Mengen und ihre Mächtigkeiten sind eine Vorbereitung auf die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen als Teilmengen des Ergebnisraums. Falls die Klasse mit derartigen Aufgaben bereits vertraut ist, dürfen sie gerne übersprungen werden.

Beispiel 2.5 In einer Sportklasse von 24 Jugendlichen schwimmen 12 und 10 machen Leichtathletik. 4 betreiben beide Sportarten. Unsere Aufgabe ist, Folgendes zu bestimmen.

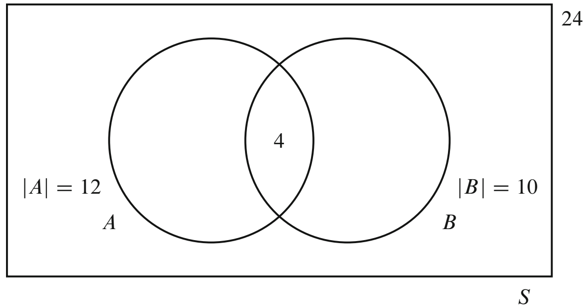

Abb. 2.14 Graphische Darstellung der Information $|S| = 24$, $|A| = 12$, $|B| = 10$, $|A \cap B| = 4$

(i) Wie viele betreiben keine dieser beiden Sportarten?
(ii) Wie viele betreiben genau eine dieser beiden Sportarten?
(iii) Wie viele schwimmen, machen aber keine Leichtathletik?
(iv) Wie viele machen keine Leichtathletik?

Wir gehen wie folgt vor: Wir bezeichnen S als die Menge aller Jugendlichen in der Klasse, A als die Menge der Schwimmer und B als die Menge der Leichtathleten. Aus der Aufgabenformulierung wissen wir, dass

$$|S| = 24, \quad |A| = 12, \quad |B| = 10 \quad \text{und} \quad |A \cap B| = 4.$$

Dieses Wissen ist in Abb. 2.14 veranschaulicht.

Wir können sofort bestimmen, dass

$$|A - B| = 8, \quad \text{weil } A = (A - B) \cup (A \cap B) \text{ und } (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset,$$

dass also die Menge A die disjunkte Vereinigung von $(A - B)$ und $(A \cap B)$ ist und somit

$$|A| = |A - B| + |A \cap B|$$

und

$$|B - A| = 6, \quad \text{weil } B = (B - A) \cup (A \cap B).$$

Dies beantwortet Frage (iii): Es gibt 8 Jugendliche, die schwimmen, aber keine Leichtathletik betreiben. Wenn wir diese neuen Kenntnisse graphisch darstellen, erhalten wir Abb. 2.15.

Mit Hilfe von Abb. 2.15 können wir leicht alle gestellten Fragen in einer geeigneten Reihenfolge beantworten. Wenn man die Anzahl der Elemente in den Mengen $A - B$, $A \cap B$ und $B - A$ kennt, kann man für alle Vereinigungen von abgegrenzten Flächen in Abb. 2.15 die Anzahl der Elemente bestimmen.

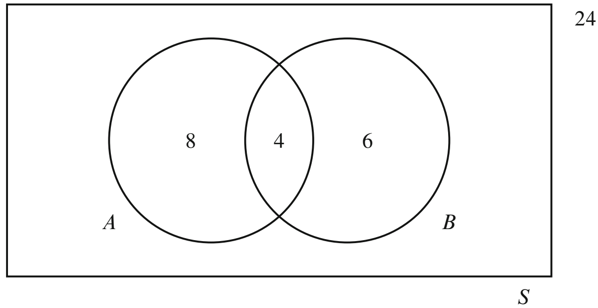

Abb. 2.15 Darstellung der verschiedenen Anzahlen $|S| = 24$, $|A - B| = 8$, $|A \cap B| = 4$ und $|B - A| = 6$

$A \cup B$ ist die Menge der Jugendlichen, die mindestens eine der Sportarten betreiben. Es gilt

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$

und die Mengen $A - B$, $A \cap B$ und $B - A$ sind außerdem paarweise disjunkt. Also ist $A \cup B$ die disjunkte Vereinigung von $A - B$, $A \cap B$ und $B - A$ und es gilt

$$|A \cup B| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A| = 8 + 4 + 6 = 18.$$

Die Menge $\overline{A \cup B} = S - (A \cup B)$ ist die Menge derjenigen, die keine der zwei Sportarten machen. Somit gilt

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 24 - 18 = 6.$$

Es gibt also genau 6 Jugendliche, die keine der beiden Sportarten betreiben. Dies beantwortet Frage (i).

Die Menge $(A - B) \cup (B - A)$ ist die Menge derjenigen, die genau eine Sportart, entweder Schwimmen oder Leichtathletik, trainieren. Wegen $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ erhalten wir

$$|(A - B) \cup (B - A)| = |A - B| + |B - A| = 8 + 6 = 14.$$

Dies beantwortet Frage (ii): Es gibt also 14 Jugendliche, die genau eine der genannten Sportarten betreiben.

$A - B$ ist die Menge der Schwimmer, die keine Leichtathletik machen. Dass $|A - B| = 8$ ist, steht schon in Abb. 2.15.

$S - B$ ist die Menge derjenigen, die keine Leichtathletik machen. Somit gilt

$$|S - B| = |S| - |B| = 24 - 10 = 14.$$

Dies beantwortet schließlich Frage (iv): Es gibt 14 Jugendliche, die keine Leichtathletik machen. $\Diamond$

Hinweis 2.6

Achten Sie darauf, dass die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der Aufgaben nicht nur rechnen und Zahlen als Ergebnisse ihrer Arbeit abgeben. Sie sollen ihr Vorgehen so ausführlich wie in den vorgeführten Beispielen schriftlich dokumentieren und so die Korrektheit ihrer Ergebnisse belegen. Je weiter wir in diesem Lehrbuch fortschreiten, desto wichtiger wird es, dass die Mathematik nicht bloss zum Berechnen entlang verstandener Algorithmen verwendet wird, sondern als Sprache der exakten Darstellung von Argumentationen und Untersuchungen gepflegt wird.

Aufgabe 2.23 In einer Wandergruppe von 40 Personen mögen 34 Käse, 22 mögen Fleisch und zwei mögen weder Käse noch Fleisch. Beantworte die folgenden Fragen:

(a) Wie viele mögen sowohl Fleisch als auch Käse?
(b) Wie viele mögen genau eines von beidem, also entweder nur Fleisch oder nur Käse?

Stelle die ganze Situation graphisch dar. Die Obermenge S sollte alle 40 Personen enthalten, die Menge A alle, die Fleisch mögen und die Menge B alle, die Käse mögen. Schreibe in deine Zeichnung die jeweilige Personenzahl für alle 4 paarweise disjunkten Mengen $S - (A \cup B)$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ in diese Mengen.

Aufgabe 2.24 In einer Klasse von 24 Studenten spielen 16 Fußball und 5 Tennis. 4 spielen beides, sowohl Tennis als auch Fußball.

(a) Bestimme die Anzahl derjenigen, die weder Fußball noch Tennis spielen.
(b) Wie viele spielen zwar Fußball, aber nicht Tennis?
(c) Wie viele spielen zwar Tennis, aber nicht Fußball?

Aufgabe 2.25 In einer Klasse lernt jede und jeder mindestens eine der beiden Fremdsprachen Englisch und Französisch. 75 % lernen Englisch und 50 % lernen Französisch.

(a) Wie viel Prozent der Klasse lernen beide Sprachen?
(b) Wie viele Personen lernen nur Englisch und kein Französisch, falls die Klasse 40 Personen hat?
(c) Wie viele Personen lernen nur Französisch und kein Englisch, wenn die Klasse 20 Personen hat?

Hinweis 2.7

Die folgenden Betrachtungen über drei Mengen sind freiwilliger Zusatzstoff.

Beispiel 2.6 In einem Studiengang stehen 3 Sprachen, nämlich Englisch, Italienisch und Französisch, zur Wahl. Jeder Studierende muss mindestens eine und höchstens zwei wählen. Für Englisch haben sich 20, für Französisch 15 und für Italienisch 10 eingeschrieben.

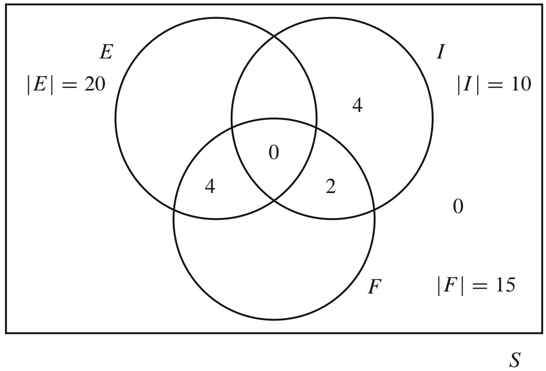

Abb. 2.16 Graphische Darstellung des im Text formulierten Wissens im Beispiel 2.6

Es gibt 4 Studierende, die sich nur für Italienisch und keine andere Sprache entschieden haben. 4 Studierende wählten die Kombination Englisch/Französisch und 2 wählten die Kombination Französisch/Italienisch. Unsere Aufgabe ist es zu bestimmen, wie viele

(i) nur Französisch wählten und keine andere Sprache,
(ii) nur Englisch wählten und keine andere Sprache,
(iii) die Kombination Englisch/Italienisch wählten,
(iv) Studierende es in dem Studiengang gibt.

Wir bezeichnen durch E die Menge aller Studierenden, die Englisch genommen haben, F nehmen wir für Französisch und I für Italienisch. Jetzt können wir unser Wissen wie folgt zusammenfassen:

$$S = E \cup F \cup I, \quad |E \cap F \cap I| = 0,$$

denn jede und jeder muss mindestens eine Sprache wählen und niemand darf alle drei nehmen. Weiter haben wir

$$|I| = 10, \quad |E| = 20, \quad |F| = 15, \quad |F \cap E| = 4, \quad |F \cap I| = 2$$
$$\text{und} \quad |I - (E \cup F)| = 4.$$

Abb. 2.16 liefert uns eine viel anschaulichere Darstellung unseres Wissens. Dort ist $E \cup F \cup I$ in 7 paarweise disjunkte Teile unterteilt.

Die Menge F besteht aus vier disjunkten Teilen, deren Elementzahl wir für drei schon kennen. Weil die Gesamtzahl in F 15 ist, liegen in dem Teil $F - (E \cup I)$ genau $15 - 4 - 0 - 2 = 9$ Elemente.

Wegen $|E| = 20$ müssen die zwei fehlenden Teile $E - (F \cup I)$ und $E \cap I - E \cap I \cap F$ zusammen $20 - 4 - 0 = 16$ Elemente umfassen. Wegen $|I| = 10$ muss der Teil $E \cap I - E \cap I \cap F$ genau $10 - 4 - 2 - 0 = 4$ Elemente enthalten. Somit hat der Teil $E - (F \cup I)$ genau $16 - 4 = 12$ Elemente (Abb. 2.17).

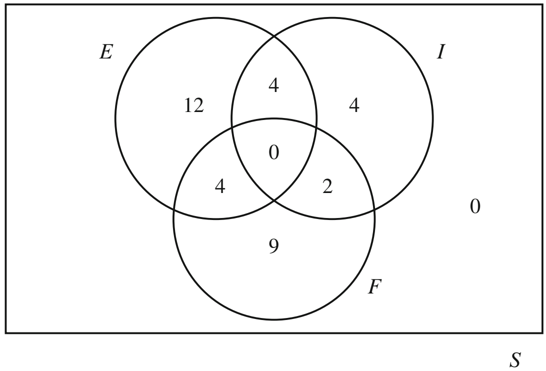

Abb. 2.17 Graphische Darstellung aller Teilmengen im Beispiel 2.6

Wenn man alle Zahlen der Elemente in diesen 7 disjunkten Teilen von $E \cup F \cup I$ kennt, kann man alle Fragen über die Elementzahl von beliebigen Teilmengen beantworten, weil man sie aus einigen dieser 7 Teile zusammensetzen kann. Somit ist zum Beispiel $|S| = |E \cup I \cup F| = 12 + 4 + 4 + 4 + 0 + 2 + 9 = 35$, was Teilfrage (iv) beantwortet. $\Diamond$

Aufgabe 2.26 Es stehen drei Fächer Chemie, Physik und Biologie zur Auswahl. Jeder Student muss mindestens eins dieser Fächer und darf höchstens zwei dieser Fächer wählen. Die Gesamtanzahl der Studierenden ist 34. Davon wählen 9 genau zwei Fächer. Von diesen 9 wählen 4 Chemie und Biologie und 3 von den 9 wählen Physik und Chemie. Insgesamt haben sich 19 für Chemie eingeschrieben, 13 sind insgesamt für Physik eingeschrieben. Bestimme die folgenden Zahlen.

(a) Die Anzahl der Studierenden, welche Chemie als einziges Fach gewählt haben,
(b) die Anzahl der Studierenden, welche beide Fächer Biologie und Physik gewählt haben,
(c) die Anzahl der Studierenden, welche für Biologie eingeschrieben sind.

2.5 Wahrscheinlichkeitsraum als ein Modell eines Zufallsexperimentes

Wir haben uns schon darauf geeinigt, dass wir ein Zufallsexperiment als ein Paar

$$(S, P)$$

Ergebnisraum — Wahrscheinlichkeitsverteilung über S

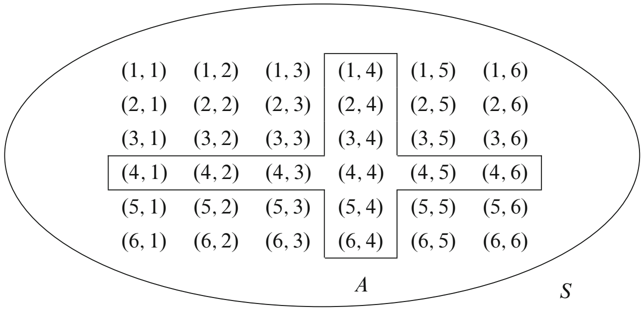

Abb. 2.18 Graphische Darstellung des Ereignisses $A =$ „es fällt mindestens eine 4" beim zweifachen Würfeln als Teilmenge der Ergebnismenge S

betrachten können. Die Elemente von S sind alle möglichen Ergebnisse (Resultate) des Experiments. Jetzt wiederholen wir den Begriff des allgemeinen Ereignisses, den wir schon in Kap. 1 erwähnt haben.

Begriffsbildung 2.2 *Sei $\Omega = (S, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Jede Teilmenge von S nennen wir ein* ***Ereignis in Ω****. Wenn ein Ereignis $A = \{e\}$ nur ein Ergebnis e enthält, dann sprechen wir von einem* ***elementaren Ereignis****.*

Beispiel 2.7 Beim Würfeln haben wir $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Menge $A = \{1, 3, 5\}$ ist dann das Ereignis, dass eine ungerade Zahl fällt. Die Menge $B = \{2, 3, 5\}$ ist das Ereignis, dass eine Primzahl fällt. Die Menge $\{3, 4, 5, 6\}$ ist das Ereignis, dass eine Zahl größer als 2 fällt. Die sechs elementaren Ereignisse $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ und $\{6\}$ entsprechen den sechs Ergebnissen „1", „2", „3", „4", „5" und „6" des Zufallsexperiments.

Beim doppelten Münzwurf haben wir

$$S = \big\{(\text{Kopf}, \text{Kopf}), (\text{Kopf}, \text{Zahl}), (\text{Zahl}, \text{Kopf}), (\text{Zahl}, \text{Zahl})\big\}.$$

Das Ereignis

$$E = \big\{(\text{Kopf}, \text{Kopf}), (\text{Kopf}, \text{Zahl}), (\text{Zahl}, \text{Kopf})\big\}$$

ist das Ereignis, dass mindestens einmal Kopf fällt.

Das Ereignis

$$A = \big\{(\text{Kopf}, \text{Zahl}), (\text{Zahl}, \text{Kopf})\big\}$$

ist das Ereignis, dass beim doppelten Münzwurf unterschiedliche Resultate vorkommen.

Wir betrachten das Würfeln mit zwei Würfeln. In Abb. 2.18 sind anschaulich alle 36 Ergebnisse dargestellt. Die gekennzeichnete Menge

$$A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (1, 4), (2, 4), (3, 4), (5, 4), (6, 4)\}$$

entspricht dem Ereignis, dass mindestens einmal eine 4 gefallen ist. $\Diamond$

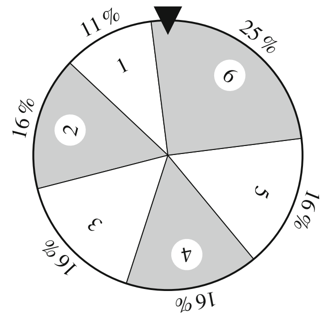

Abb. 2.19 Ein Glücksrad. Das Rad wird schnell gedreht und dann plötzlich gestoppt. Der *Pfeil oben* deutet an, welche Zahl ausgewählt wurde

Aufgabe 2.27 ✓ Gib die Menge $A \subseteq S$ für das Würfeln an, die folgenden Ereignissen entspricht.

(a) Es fällt eine gerade Zahl.
(b) Es fällt eine Zahl größer als 1 und kleiner als 5.
(c) Es fällt eine durch 3 teilbare Zahl.

Aufgabe 2.28 ✓ Betrachte das Experiment, in dem zwei unterschiedliche Würfel geworfen werden. Der Ergebnisraum S ist in Abb. 2.18 dargestellt. Notiere oder zeichne in einem ähnlichen Bild die Mengen, die folgenden Ereignissen entsprechen.

(a) Die Summe der Ergebnisse (der gefallenen Zahlen) beträgt mindestens 10.
(b) Es fällt mindestens eine 6 und die andere Zahl ist gerade.
(c) Die Summe beider gefallenen Zahlen ist genau 7.
(d) Beide gefallenen Zahlen sind gleich.
(e) Die erste Zahl ist größer als die zweite.

Wir haben gesehen, dass wir alle möglichen unterschiedlichen Ereignisse betrachten können. Wir wollen jetzt ihre Wahrscheinlichkeiten untersuchen. Uns interessieren Fragestellungen der folgenden Art: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweifachen Würfeln die Summe der gefallenen Zahlen mindestens 8 ist?

Die grundlegende Frage ist also:

Wie bestimmt man die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen aus den Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse?

Die Antwort auf diese Frage ist der grundlegende Baustein aller Wahrscheinlichkeitsrechnungen.

Beispiel 2.8 Betrachten wir das Experiment mit dem Drehen eines Glücksrads, siehe Abb. 2.19. Man dreht an dem Rad und wartet, bis dieses wieder still steht. Eine Gummilasche oben bremst die Drehung leicht und bewirkt, dass ein einzelnes

Feld eindeutig ausgewählt wird. Der Wahrscheinlichkeitsraum (S, P) hat die Ergebnismenge $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die einzelnen Zahlen haben dabei unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten.

$$\begin{aligned}
&P(6) = 0.25,\\
&P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 0.16 \text{ und}\\
&P(1) = 0.11.
\end{aligned}$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$A = \{2, 4, 6\},$$

dass eine gerade Zahl fällt? Die Berechnung erfolgt ganz natürlich durch Addition: Die Zahl 6 fällt in 25 % der Fälle, die Zahlen 2 und 4 jeweils in 16 % der Fälle. Damit fällt eine dieser Zahlen in

$$25\,\% + 16\,\% + 16\,\% = 57\,\%$$

der Fälle (siehe Abb. 2.19).

Also ist die Wahrscheinlichkeit von A gleich 0.57 (wir schreiben $P(A) = 0.57$). $\diamondsuit$

Dieses Vorgehen ist das erste Prinzip für das Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen:

(P1) *Sei $\Omega = (S, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für jedes Ereignis $A \subseteq S$ ist die Wahrscheinlichkeit von A, $P(A)$, die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse (Resultate) aus A.*

Das Prinzip (P1) besagt, dass man aus den Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse die Wahrscheinlichkeiten aller Ereignisse bestimmen kann. Betrachten wir das Experiment aus Beispiel 2.8 (Abb. 2.19). Sei $B = \{2, 3, 5\}$ das Ereignis, dass eine Primzahl fällt. Dann berechnen wir

$$P(B) = P(2) + P(3) + P(5) = 0.16 + 0.16 + 0.16 = 0.48.$$

Hinweis 2.8

Eine formal korrekte Behandlung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen sieht P als eine Funktion aus $\mathrm{Pot}(S)$ nach $[0, 1]$ und lässt die Bezeichnung $P(e)$ somit nicht zu. Formal müsste man $P(\{e\})$ schreiben. Wir verzichten hier auf diese Genauigkeit und erlauben, P gleichzeitig als eine Funktion aus S nach $[0, 1]$ zu betrachten. Dieser Punkt kann thematisiert werden, wenn dies erwünscht ist. Hier steht nicht nur eine einfachere Schreibweise, sondern auch die Entwicklung einer guten Intuition für die Bedeutung der Wahrscheinlichkeit im Vordergrund.

Aufgabe 2.29 Bestimme für das Experiment aus Beispiel 2.8 die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $C = \{1, 2, 3\}$, $D = \{1, 3, 5\}$, $E = \{1, 6\}$ und $F = \{2, 3, 4, 5\}$.

Beispiel 2.9 Betrachte nochmals das zweifache Würfeln in Abb. 2.18, wobei alle 36 möglichen Ergebnisse (i, j), $1 \leq i \leq 6$, $1 \leq j \leq 6$, die gleiche Wahrscheinlichkeit $P\big((i, j)\big) = \frac{1}{36}$ haben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A (Abb. 2.18), dass mindestens eine 4 fällt?

Wir sehen, dass A aus 11 Ergebnissen besteht. Weil alle die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ haben, berechnen wir

$$P(A) = 11 \cdot \frac{1}{36} = \frac{11}{36}. \qquad \diamondsuit$$

Auszug aus der Geschichte

Pierre Simon Laplace (1749–1827) war ein französischer Mathematiker, siehe die Abb. 2.20. Er beschäftigte sich vor allem mit der Astronomie, insbesondere mit dem sogenannten *Drei-Körper-Problem*, der Wahrscheinlichkeitstheorie und den sogenannten Differentialgleichungen.

Geboren in eine relativ wohlhabende Familie, besuchte Laplace mit 16 Jahren die Universität von Caen und reiste zwei Jahre später nach Paris. Dort stellte er sich dem damals berühmten Jean le Rond d'Alembert vor, der ihm ein Rätsel und eine Woche Zeit gab, um es zu lösen. Als Laplace am nächsten Tag die Lösung präsentierte, erhielt er von d'Alembert ein noch schwierigeres Problem, das dieser jedoch ebenso schnell löste. Dadurch beeindruckt, verschaffte d'Alambert ihm eine Stelle an der Militärakademie.

Eine äußerst produktive Phase begann im Leben von Laplace: Er publizierte 13 Artikel zu schwierigen Themen in nur 3 Jahren. Auch während der französischen Revolution konnte er weitgehend unbehindert weiterarbeiten. Im Jahre 1792 wurde er Mitglied des Komitees für Maße und Gewichte, das wenig später Einheiten wie Kilogramm und Meter festlegte, so wie wir sie heute noch verwenden.

Für kurze Zeit wurde er Innenminister von Napoleon Bonaparte, bekleidete aber auch danach wichtige Ämter, so dass er ein sehr stattliches Einkommen hatte.

Neben der Astronomie war die Wahrscheinlichkeitsrechnung das zweite große Forschungsgebiet von Laplace. Sie stellte für ihn einen Ausweg dar, um zu Resultaten zu kommen, auch wenn gewisse Kenntnisse fehlen. Er publizierte 1812 ein zweibändiges Werk mit dem Titel *Théorie Analytique des Probabilités*, worin er eine Definition der Wahrscheinlichkeit gab und abhängige und unabhängige Ereignisse betrachtete, siehe Kap. 6.

Abb. 2.20 Pierre Simon Laplace (1749–1827)

Folgende einfache Berechnungsregel der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses $E \subseteq S$ für Situationen, in denen jedes Ergebnis aus dem Ergebnisraum S gleich wahrscheinlich ist, stammt von Laplace:

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}}.$$

Es gibt viele Situationen, die sich so modellieren lassen, dass alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, wie zum Beispiel das Werfen zweier Würfel. Auch wenn diese nicht unterscheidbar sind, lohnt es sich, dieses Zufallsexperiment durch zwei unterscheidbare Würfel zu modellieren, da dann die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten vereinfacht wird.

Beim zweifachen Würfeln (Abb. 2.18) kann man mit der Regel von Laplace die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ des Ereignisses E, dass mindestens eine 4 fällt, bestimmen. Die Anzahl aller Ergebnisse ist 36 und alle sind gleich wahrscheinlich. Es gilt $|E| = 11$ (Abb. 2.18) und somit ist

$$P(E) = \frac{11}{36}.$$

Aufgabe 2.30 ✓ Bestimme für alle Ereignisse in Aufgabe 2.28 die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.

Das zweite Prinzip (P2) des Modellierens von Zufallsexperimenten ist, dass eines (und zwar genau eines) der Ergebnisse aus S auftreten muss. Ein Experiment kann also nicht ohne Resultat enden oder mit einem Ergebnis, das nicht in S ist. Eine Mischung aus zwei Ergebnissen ist auch nicht möglich.

Zum Beispiel erlauben wir beim Münzwurf nicht, dass jemand die Münze während ihres Flugs klaut (kein Ergebnis), oder dass die Münze auf der Kante stehen bleibt (ein Ergebnis, das nicht in $S = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\}$ betrachtet wird). Wenn man die Möglichkeit, auf der Kante stehen zu bleiben, betrachten will, muss man $S = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}, \text{Kante}\}$ als Ergebnisraum annehmen und $P(\text{Kante})$ bestimmen. Deshalb müssen die Häufigkeiten der Ergebnisse zusammen 100 % ergeben und wir erhalten das folgende Prinzip.

(P2) *Für jeden Wahrscheinlichkeitsraum $\Omega = (S, P)$ gilt*

$$P(S) = 1,$$

das heißt, die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Ergebnisse in S muss 1 ergeben.

Die Wahrscheinlichkeit 1 nennen wir **Sicherheit** und S heißt **das sichere Ereignis**.

Eine andere wichtige Menge ist $\emptyset$, die formal auch als Ereignis betrachtet wird. Weil $\emptyset$ kein Ergebnis enthält, entspricht $\emptyset$ dem Ereignis ohne Ergebnis. So etwas haben wir aber nicht zugelassen. Dies wird durch das Prinzip (P3) formalisiert.

(P3) $\emptyset$ *wird **unmögliches Ereignis** genannt und wir setzen*

$$P(\emptyset) = 0.$$

Aus den drei Prinzipien (P1), (P2) und (P3) kann man einige Grundregeln für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten ableiten. Diese Regeln können uns helfen, die Wahrscheinlichkeiten einiger Ereignisse schneller und einfacher zu bestimmen. Diese Prinzipien können ferner dazu verwendet werden, eine mathematische Definition des Wahrscheinlichkeitsraums zu geben.

Hinweis 2.9

Die folgende Definition ist nur für fortgeschrittene Schülerinnen und Schüler ab Klasse 11 geeignet.

Begriffsbildung 2.3 *Für eine endliche Menge S und eine Funktion P aus $\{A \mid A \subseteq S\}$ nach $[0, 1]$, die also jeder Teilmenge von S eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 zuordnet, nennen wir das Paar (S, P) einen* ***Wahrscheinlichkeitsraum****, wenn folgende Regeln gelten:*

(P1) *Für alle $A \subseteq S$ ist $P(A)$ die Summe der $P(\{e\})$ für alle $e \in A$.*
(P2) $P(S) = 1$.
(P3) $P(\emptyset) = 0$.

Diese Definition des Wahrscheinlichkeitsraums ist ein Paradebeispiel für den Weg zur Einführung eines neuen Konzeptes (in diesem Fall der Wahrscheinlichkeit) in der Mathematik. Anstatt direkt zu versuchen, die Bedeutung des Wortes „Wahrscheinlichkeit" zu erklären, was formal nicht geht, sagt man indirekt, dass es sich um Wahrscheinlichkeit handelt, wenn gewissen „Rechenprinzipien", die der Wahrscheinlichkeit eigen sein müssen, erfüllt sind.

Im Folgenden lernen wir weitere abgeleitete Rechenregeln kennen, die man für die Definition nicht braucht, die jedoch das Arbeiten mit Wahrscheinlichkeiten erleichtern.

Begriffsbildung 2.4 *Sei $A \subseteq S$ ein Ereignis aus einem Wahrscheinlichkeitsraum (S, P). Das* ***Gegenereignis*** *von (oder das* ***komplementäre Ereignis*** *zu) A in (S, P) ist das Ereignis*

$$\overline{A} = S - A.$$

Wir verstehen, dass die Bedeutung von $\overline{A}$ ist, dass A nicht eintritt. $\overline{A}$ enthält genau alle Ergebnisse, die nicht in A liegen. $\overline{A}$ ist also das echte Gegenteil von A. Offensichtlich gilt

$$\overline{A} \cup A = S \quad \text{und} \quad \overline{A} \cap A = \emptyset.$$

In Abb. 2.21 ist anschaulich dargestellt, dass die Ergebnisse von A und $\overline{A}$ kein gemeinsames Ergebnis enthalten. Beim zweifachen Münzwurf ist zum Beispiel für $A = \{(\text{Kopf}, \text{Kopf})\}$ die Menge

$$\overline{A} = \{(\text{Zahl}, \text{Kopf}), (\text{Kopf}, \text{Zahl}), (\text{Zahl}, \text{Zahl})\}$$

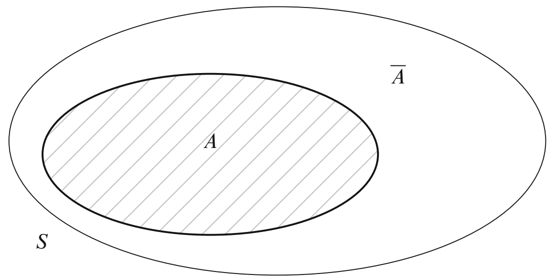

Abb. 2.21 Schematische Darstellung eines Ereignisses A und seines Gegenereignisses $\overline{A}$

das Gegenereignis zu A. Das Ereignis A bedeutet „es fällt keine Zahl" oder „es fallen zwei Köpfe". Das Ereignis $\overline{A}$ bedeutet „es fällt mindestens eine Zahl" oder „es fällt höchstens ein Kopf".

Aufgabe 2.31 ✓ Bestimme die Gegenereignisse der Ereignisse in Aufgabe 2.27. Beschreibe sie in Worten sowie als Mengen von Ergebnissen.

Aufgabe 2.32 ✓ Bestimme die Gegenereignisse zu den Ereignissen in Aufgabe 2.28. Beschreibe sie in Worten sowie als Mengen von Ergebnissen.

Aus der Definition von $\overline{A}$ (Abb. 2.21) ist klar, dass jedes Ergebnis aus S entweder in A oder in $\overline{A}$ ist. Deswegen gilt

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Diese Beobachtung führen wir als die erste Rechenregel (R1) ein.

(R1) ***Komplementregel***
Für alle Ereignisse A eines Wahrscheinlichkeitsraumes (S, P) gilt

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \quad \textit{und} \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

Beispiel 2.10 Wozu ist diese Regel nützlich? Betrachten wir wieder das Experiment des zweifachen Würfelns (siehe Abb. 2.18). Es soll die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, dass die Summe der gewürfelten Zahlen höchstens 10 ist, bestimmt werden. Sicherlich besteht die Möglichkeit, alle Ergebnisse aus A aufzuzählen. Diese sind aber sehr zahlreich. Darum könnte diese Methode insbesondere bei größeren Experimenten mühsam werden. Die Wahrscheinlichkeit von $\overline{A}$ ist aber leicht zu bestimmen, weil $\overline{A}$ bedeutet, „Die Summe der geworfenen Zahlen ist mindestens 11". Also ist

$$\overline{A} = \{(6,5), (5,6), (6,6)\}$$

und somit

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= P\big((6,5)\big) + P\big((5,6)\big) + P\big((6,6)\big) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Nach Regel (R1) erhalten wir, ohne alle Ergebnisse aus A aufzuzählen,

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}. \qquad \diamondsuit$$

Aufgabe 2.33 ✓ Modelliere den Wurf von drei fairen Münzen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zweimal (also für höchstens zwei Münzen) Kopf fällt?

Aufgabe 2.34 ✓ Betrachte das Experiment des zweifachen Würfelns (siehe Abb. 2.18). Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) das Produkt der geworfenen Zahlen nicht gleich 24 ist?
(b) die zweite Zahl kein Vielfaches der ersten Zahl ist?
(c) die Summe der zwei Zahlen ungleich 4 ist.

Hinweis 2.10

Die folgenden beiden ⋆-Aufgaben sind zu schwierig, falls bisher noch keine kombinatorischen Überlegungen ausgeführt wurden. Sie können hier nur als Herausforderungen für diejenigen, die gerne mathematische Puzzles lösen, betrachtet werden.

Aufgabe 2.35 ⋆✓ Jan will folgende Wette eingehen: „Ich werfe drei faire Würfel. Ich wette, dass mindestens eine 5 oder eine 6 dabei fällt.“ Ist es lohnenswert, sich auf eine Wette mit Jan einzulassen?

Aufgabe 2.36 ⋆ Peter wirft vier faire Münzen. Er wettet, dass genau zweimal Kopf und zweimal Zahl fallen. Lohnt es sich, auf die Wette mit Peter einzugehen?

Wenn man zwei Ereignisse A und B mit $A \cap B = \emptyset$ hat (siehe Abb. 2.22), sehen wir sofort, dass das Ereignis $A \cup B$ als Auflistung der Elemente von A, gefolgt von der Auflistung der Elemente von B, dargestellt werden kann. Nach (P1) erhalten wir also für das Beispiel

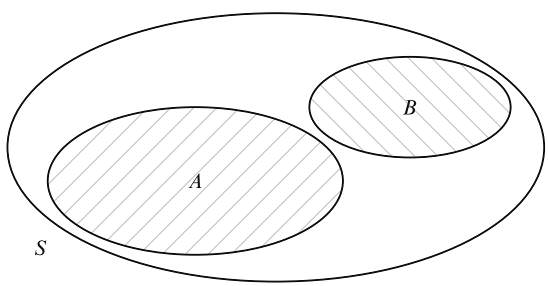

Abb. 2.22 Schematische Darstellung zweier Ereignisse A, B mit leerem Durchschnitt: $A \cap B = \emptyset$

$A = \{2, 4, 6\}$ und $B = \{3, 5\}$ beim Würfeln, dass

$$P(A \cup B) = \underbrace{P(2) + P(4) + P(6)}_{P(A)} + \underbrace{P(3) + P(5)}_{P(B)}$$
$$= P(A) + P(B).$$

Dies fassen wir in der Rechenregel (R2) zusammen.

(R2) ***Einfache Additionsregel***
Für zwei disjunkte Ereignisse A und B ($A \cap B = \emptyset$) eines Wahrscheinlichkeitsraumes (S, P) gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Aufgabe 2.37 ✓ Betrachte das zweifache Würfeln mit fairen Würfeln (siehe Abb. 2.18). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der geworfenen Zahlen

(a) gleich 4 ist?
(b) gleich 8 ist?
(c) gleich 4 oder gleich 8 ist?
(d) gerade ist?
(e) sich von 2 und 11 unterscheidet?

Wie steht es aber mit $A \cup B$, wenn A und B nicht disjunkt sind? Wenn wir jetzt

$$P(A) + P(B)$$

betrachten, kommen in dieser Summe nach (P1) alle Elemente aus $A - B$ und aus $B - A$ genau einmal vor. Die Elemente aus $A \cap B$ kommen in der Summe $P(A) + P(B)$ genau zweimal vor, nämlich einmal bei der Summierung der Wahrscheinlichkeiten der Elemente aus A und einmal bei der Summierung der Ergebnisse aus B. Deswegen reicht es, von $P(A) + P(B)$ die Wahrscheinlichkeit $P(A \cap B)$ zu subtrahieren, um $P(A \cup B)$ zu berechnen.

(R3) ***Allgemeine Additionsregel***
Für zwei beliebige Ereignisse A und B eines Wahrscheinlichkeitsraumes (S, P) gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Betrachten wir das Beispiel des Würfelexperiments in Abb. 2.23 mit $A = \{1, 6, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 2, 5\}$ und

$$P(A) = P(1) + P(6) + P(3) + P(4),$$
$$P(B) = P(3) + P(4) + P(2) + P(5).$$

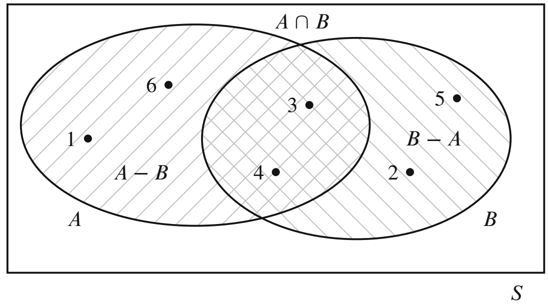

Abb. 2.23 Darstellung zweier Ereignisse $A = \{1, 6, 3, 4\}$ und $B = \{3, 4, 2, 5\}$ beim einfachen Würfeln

Damit ist

$$P(A) + P(B) = P(1) + P(6) + P(2) + P(5) + \underbrace{P(3) + P(4)}_{P(A \cap B)} + \underbrace{P(3) + P(4)}_{P(A \cap B)}.$$

Anhand von

$$P(A \cup B) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

erkennen wir, dass

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Eine andere Begründung für (R3) ist die folgende:

$$A \cup B = A \cup (B - A),$$

wobei $A \cap (B - A) = \emptyset$ (siehe Abb. 2.23).

Nach (R2) gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A). \tag{2.3}$$

Aber

$$B = (B - A) \cup (A \cap B)$$

und offensichtlich (siehe Abb. 2.23)

$$(B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset.$$

Damit gilt nach (R2)

$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$$

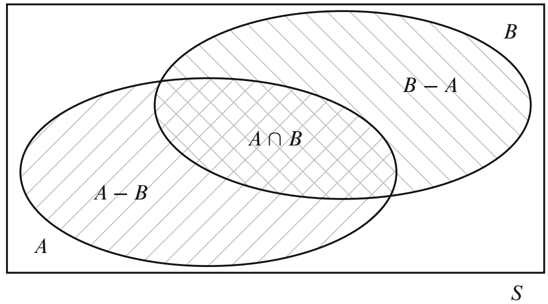

Abb. 2.24 Schematische Darstellung zweier Ereignisse A und B, welche die Ergebnisse in $A \cup B$ in die drei Ereignisse $A - B$, $A \cap B$ und $B - A$ unterteilen

und als Umstellung dieser Gleichung

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B). \tag{2.4}$$

Wenn wir jetzt in (2.3) die Wahrscheinlichkeit $P(B - A)$ durch (2.4) ersetzen, erhalten wir

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - A) = P(A) + \underbrace{P(B) - P(A \cap B)}_{P(B-A) \text{ nach } (2.4)}.$$

Eines der wichtigsten Ziele beim Modellieren ist es, neue Informationen aus den bereits vorhandenen Informationen zu gewinnen. Gute Modelle ersparen uns somit viel Arbeit beim Experimentieren und Messen, weil wir die fehlenden Informationen aus den bekannten Tatsachen errechnen können. Später werden wir sehen, wie uns diese Möglichkeit sogar hilft, neue Entdeckungen in den Naturwissenschaften zu machen oder Experimente theoretisch zu erklären.

Beispiel 2.11 Die Rechenregeln der Wahrscheinlichkeiten kann man verwenden, um in nur teilweise bekannten Wahrscheinlichkeitsräumen die unbekannten Wahrscheinlichkeiten einiger Ereignisse auszurechnen. Betrachten wir die folgende Aufgabenstellung: Wir wissen für Ereignisse A und B eines Wahrscheinlichkeitsraumes (S, P), dass

$$P(A \cup B) = 0.8,$$
$$P(A \cap B) = 0.3,$$
$$P(A \cap \overline{B}) = 0.2.$$

Unsere Aufgabe ist es, die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, $\overline{A} \cup \overline{B}$, $(A \cap B) \cup \overline{A}$ und $S - (\overline{B} \cap A)$ zu bestimmen. Eine oft erfolgreiche Strategie ist, sich die Menge $A \cup B$ als die Vereinigung von drei paarweise disjunkten Mengen $A - B$, $A \cap B$ und $B - A$ vorzustellen (siehe Abb. 2.24). Wegen der Disjunktheit dieser Mengen gilt nach (R2)

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A). \tag{2.5}$$

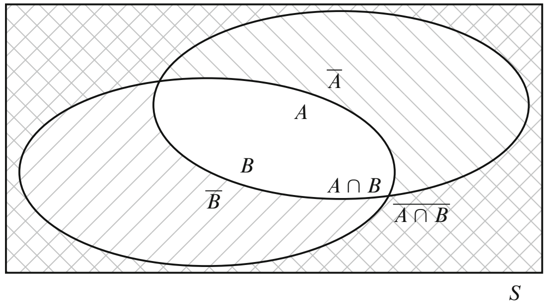

Abb. 2.25 Schematische Darstellung der Menge $\overline{A} \cup \overline{B}$, welche gleich $\overline{A \cap B}$ ist

Wir beobachten, dass $B - A = B \cap \overline{A}$ und $A - B = A \cap \overline{B}$ ist. Also kennen wir außer $P(B-A) = P(B \cap \overline{A})$ alle Wahrscheinlichkeiten, die in (2.5) auftreten. Durch Einsetzen der Werte erhalten wir

$$0.8 = 0.2 + 0.3 + P(B - A)$$

und somit

$$P(B - A) = 0.3.$$

Jetzt nutzen wir wieder (R2), um die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B wie folgt zu berechnen:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A - B) + P(A \cap B) \\ &\qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{Nach (R2), weil } A = (A - B) \cup (A \cap B) \\ \text{und } (A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset \text{ (siehe Abb. 2.24).} \end{array} \right\} \\ &= 0.2 + 0.3 = 0.5, \\ P(B) &= P(B - A) + P(A \cap B) \\ &\qquad \{\text{Nach (R2), weil } B = (B - A) \cup (A \cap B) \text{ und } (B - A) \cap (A \cap B) = \emptyset\} \\ &= 0.3 + 0.3 = 0.6. \end{aligned}$$

In Abb. 2.25 sehen wir, dass $\overline{A} \cup \overline{B} = S - (A \cap B) = \overline{A \cap B}$ ist. Damit gilt nach (R1)

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.3 = 0.7.$$

Nach (R1) erhalten wir dann

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

Weil $(A \cap B) \cap \overline{A} = \emptyset$ ist, erhalten wir nach (R2)

$$\begin{aligned} P\big((A \cap B) \cup \overline{A}\big) &= P(A \cap B) + P(\overline{A}) \\ &= 0.3 + 0.5 = 0.8. \end{aligned}$$

Die letzte Aufgabe ist es, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $S - (\overline{B} \cap A)$ zu bestimmen. Wir wissen schon, dass $\overline{B} \cap A = A - B$ ist und somit erhalten wir nach (R1)

$$\begin{aligned} P(S - (\overline{B} \cap A)) &= 1 - P(\overline{B} \cap A) \\ &= 1 - P(A - B) \\ &= 1 - 0.2 = 0.8. \end{aligned} \qquad \diamondsuit$$

Aufgabe 2.38 Wir wissen über zwei Ereignisse A und B eines Wahrscheinlichkeitsraumes (S, P), dass $P(\overline{A}) = 0.4$, $P(B) = 0.7$ und $P(\overline{A \cup B}) = 0.2$ ist. Bestimme die Wahrscheinlichkeit von A, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$, $\overline{B}$ und $\overline{A \cap B}$. Argumentiere dabei so sorgfältig und detailliert wie in Beispiel 2.11.

Aufgabe 2.39 Wir haben ein Glücksrad und 8 mögliche Resultate, die den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 entsprechen. Wir wissen, dass

- die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Zahl zu erhalten, 0.5 ist,
- die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Primzahl zu erhalten, 0.1 ist,
- $P(5) = P(7) = 0.05$ und $P(4) = P(6) = P(8)$,
- $P(1) = P(3)$.

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten aller einzelnen elementaren Ereignisse 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

- es fällt eine ungerade Primzahl,
- es fällt eine ungerade Zahl, die keine Primzahl ist.

Hinweis Du kannst A als Menge aller Primzahlen kleiner 8 und $B = \{1, 3, 5, 7\}$ als Menge aller ungeraden Zahlen kleiner 8 nehmen. Jetzt kannst du A und B in S graphisch darstellen. Das Ereignis $A - B$ bedeutet dann zum Beispiel, dass eine Primzahl fällt, die nicht ungerade ist.

Beispiel 2.12 Wir wissen über zwei Ereignisse A und B eines Wahrscheinlichkeitsraumes (S, P), dass

$$\begin{aligned} P(A \cup \overline{B}) &= 0.8, \\ P(A \cap \overline{B}) &= 0.1, \\ P(\overline{B}) &= 0.3 \end{aligned}$$

gelten. Die Aufgabe ist, die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, $(\overline{A} \cap B) \cup \overline{B}$ und $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ zu bestimmen.

Wir verwenden die gleiche Strategie wie im vorherigen Beispiel und versuchen zuerst, unabhängig von der Zielsetzung die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A - B$, $A \cap B$, $B - A$ (siehe Abb. 2.24) zu bestimmen. In erster Linie beobachten wir, dass

$$A \cup \overline{B} = S - (B - A) = \overline{B - A}$$

ist. Somit erhalten wir nach (R1)

$$\begin{aligned} P(B - A) &= 1 - P(\overline{B - A}) \\ &= 1 - P(A \cup \overline{B}) \\ &= 1 - 0.8 = 0.2. \end{aligned}$$

Wir sehen auch, dass

$$A \cap \overline{B} = A - B$$

ist, und folgern daraus $P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = 0.1$.

Aus $P(\overline{B}) = 0.3$ erhalten wir $P(B) = 0.7$ nach (R1). Nach (R2) gilt

$$P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$$

und daher

$$\begin{aligned} 0.7 = 0.2 + P(A \cap B) \text{ also} \\ P(A \cap B) = 0.5. \end{aligned}$$

Jetzt kennen wir die Wahrscheinlichkeiten von $A \cap B$, $A - B$ und $B - A$ und können mittels (R2) einfach die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A bestimmen:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A - B) + P(A \cap B) \\ &= 0.1 + 0.5 = 0.6. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $(\overline{A} \cap B) \cup \overline{B}$ kann man auf unterschiedliche Weisen vorgehen. Wir können zum Beispiel direkt rechnen oder zuerst den Mengenausdruck vereinfachen.

Weil $\overline{A} \cap B$ und $\overline{B}$ disjunkt sind (denn $\overline{B}$ und B sind disjunkt und es gilt $\overline{A} \cap B \subseteq B$), erhalten wir nach (R2)

$$\begin{aligned} P\left((\overline{A} \cap B) \cup \overline{B}\right) &= P(\overline{A} \cap B) + P(\overline{B}) \\ &= P(B - A) + P(\overline{B}) \\ &= 0.2 + 0.3 = 0.5. \end{aligned}$$

Wenn wir zuerst die Menge $(\overline{A} \cap B) \cup \overline{B}$ zeichnen, dann beobachten wir, dass

$$(\overline{A} \cap B) \cup \overline{B} = (B - A) \cup \overline{B} = S - (A \cap B) = \overline{A \cap B}$$

gilt. Dann erhalten wir nach (R1)

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

Für das Ereignis $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)$ beobachten wir wieder, dass $\overline{A} \cap \overline{B}$ und $A \cap B$ disjunkt sind und wir somit (R2) nutzen können, um weiterzurechnen:

$$\begin{aligned}
P\big((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)\big) &= P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A \cap B) \\
&= P(\overline{A \cup B}) + 0.5 \\
&\quad \big\{\text{weil } \overline{A} \cap \overline{B} = S - (A \cup B)\big\} \\
&= 1 - P(A \cup B) + 0.5 \\
&\quad \{\text{nach (R1)}\} \\
&= 1.5 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \\
&\quad \{\text{nach (R3)}\} \\
&= 1.5 - (0.6 + 0.7 - 0.5) \\
&= 1.5 - 0.8 = 0.7.
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Aufgabe 2.40 ⋆ Kannst du eine analoge Regel zu (R3) für die Berechnung von $P(A \cup B \cup C)$ für drei beliebige Ereignisse A, B und C erstellen?

Aufgabe 2.41 ✓ Betrachte 52 Spielkarten der Farben „Karo“, „Kreuz“, „Herz“ und „Pik“. Von jeder Farbe haben wir die 13 Karten: Ass, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bube, Dame und König. Das Zufallsexperiment entspricht der Ziehung einer Karte. Jede Karte hat die gleiche Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{52}$ gezogen zu werden. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.

(a) Es wird ein Ass gezogen.
(b) Es wird ein Ass oder ein Kreuz gezogen.
(c) Es wird ein König oder eine Dame gezogen.
(d) Es wird ein Karo oder eine Dame gezogen.
(e) Es wird eine Zahl gezogen.

Aufgabe 2.42 In einem unbekannten Zufallsexperiment ist nur eine Teilinformation über die Wahrscheinlichkeit der zwei Ereignisse A und B bekannt.

(a) Wir wissen, dass $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.25$ und $P(A \cap B) = 0.1$ ist. Bestimme mit Hilfe der Regeln (R1), (R2) und (R3) die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A \cup B), \quad P(\overline{A} \cup \overline{B}), \quad P(A \cup \overline{B}), \quad P(A - B),$$
$$P(\overline{A} \cap B), \quad P\big((A \cup B) - (A \cap B)\big) \quad \text{und} \quad P(\overline{B - A}).$$

(b) Wir wissen, dass $P(A \cup B) = 0.75$, $P(A \cap B) = 0.25$ und $P(A \cup \overline{B}) = 0.7$. Bestimme die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, A, $A \cap \overline{B}$ und B.

2.6 Das Summenzeichen

Hinweis 2.11

Falls man dieses Kapitel schon früher, im achten oder neunten Schuljahr, unterrichtet, kann man auf die Summenzeichen an dieser Stelle verzichten und sie später nachholen. Worauf man aber keinesfalls verzichten sollte, ist die sorgfältige Prägung der Begriffe „elementare Ereignisse“, „Ergebnisraum“, „relative Häufigkeit“ und „Wahrscheinlichkeit“. Nur ein gutes Verständnis des Wahrscheinlichkeitsraums als Modell eines Zufallsexperiments gibt uns die Basis, zu der wir bei der Überprüfung unserer Überlegungen in komplexeren Situationen zurückkehren können.

Die Schreibweise

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

ist recht mühsam und wird bei wachsender Anzahl Ergebnisse zusehends unübersichtlicher. Die Mathematiker haben daher ein Zeichen für die Summe eingeführt, den griechischen Großbuchstaben Sigma: Σ. Im obigen Fall würde dieses Zeichen wie folgt verwendet:

$$\sum_{i=1}^{6} P(i) \tag{2.6}$$

Unter dem Summenzeichen steht die *Zählvariable*, hier ist es i, und es wird angegeben, bei welchem i die Summierung beginnt, hier bei $i = 1$. Oberhalb des Summenzeichens steht bei welchem Wert für i die Summierung endet, hier bei $i = 6$. Die Zählvariable wird immer um 1 erhöht. Man hat also i je einmal gleich $1, 2, 3, 4, 5, 6$ zu setzen. Rechts neben dem Summenzeichen steht, was summiert werden muss, hier $P(i)$. Ersetzt man i durch $1, 2, 3, 4, 5, 6$, so erhält man $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ und $P(6)$. Wenn man diese nun aufsummiert, so erhält man aus (2.6) die Summe $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$.

Beispiel 2.13 Die Summe der ersten 100 Quadratzahlen, also $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 99^2 + 100^2$, kann man als

$$\sum_{i=1}^{100} i^2$$

schreiben. ◊

Beispiel 2.14 Die Summe der ersten 100 geraden natürlichen Zahlen, also $2 + 4 + 6 + \ldots + 198 + 200$, kann man als

$$\sum_{k=1}^{100} 2k$$

schreiben. Auch hier ist wieder zu beachten, dass die Schrittweite der Zählvariablen immer 1 ist. Ferner spielt die Wahl der Zählvariablen keine Rolle. ◊

Aufgabe 2.43 Schreibe die Summe der ersten 100 Zweierpotenzen, also $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{99}$, mit dem Summenzeichen.

Aufgabe 2.44 Schreibe die Summe der ersten 100 Kehrwerte, also $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}$, mit dem Summenzeichen.

Aufgabe 2.45 Berechne folgende Zahlen, ohne den Taschenrechner zu benutzen:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} 2$,

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} (-1)^k$,

(c) $\displaystyle\sum_{x=-100}^{100} x$,

(d) $\displaystyle\sum_{s=1}^{100} s^2 - \sum_{t=0}^{99} t^2$.

Manchmal wird die Summe auch über eine Menge gebildet. Ist zum Beispiel S die Menge $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, so kann man die Summe (2.6) auch so schreiben:

$$\sum_{s \in S} P(s)$$

Beispiel 2.15 Sei S die Menge aller Paare (i, j) mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Wir sollen

$$\sum_{(i,j)\in S} i$$

berechnen.

Die Variable j kommt in der Summierung nicht direkt vor. Daher gibt es 6 Summanden mit $i = 1$, ebenso gibt es 6 Summanden mit $i = 2$, usw. Somit gilt

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in S} i &= 6\cdot 1 + 6\cdot 2 + 6\cdot 3 + 6\cdot 4 + 6\cdot 5 + 6\cdot 6\\ &= 6\cdot(1+2+3+4+5+6)\\ &= 6\cdot 21\\ &= 126.\end{aligned}$$

◊

Aufgabe 2.46 Sei S die Menge aller Primzahlen zwischen 1 und 10. Berechne

$$\sum_{p\in S} p^2 \quad \text{und} \quad \sum_{p\in S} 10^p.$$

Aufgabe 2.47 Sei S die Menge der ungeraden Zahlen zwischen 2 und 14. Berechne

$$\sum_{u\in S} \frac{u-3}{2}.$$

Das Summenzeichen verwenden wir in Wahrscheinlichkeitsrechnungen, um das Prinzip (P1) mathematisch auszudrücken: Für jeden Wahrscheinlichkeitsraum (S, P) mit endlichem S und für jedes Ereignis $A \subseteq S$ gilt

$$P(A) = \sum_{e\in A} P(e).$$

Auszug aus der Geschichte

Der Erste, der den griechischen Buchstaben Σ für die Bezeichnung der Summe verwendet hat, ist Leonhard Euler (1707–1783). Abb. 2.26 zeigt Euler auf einer alten Schweizer Zehnfrankennote.

Euler erbrachte originelle Beiträge zu vielen Gebieten der Mathematik, insbesondere zur Zahlentheorie, Analysis und Algebra. Einige Gebiete der Mathematik hat er neu erschaffen, so zum Beispiel die Topologie und die Graphenthorie. Er gilt als der einflussreichste Mathematiker des 18. Jahrhunderts und generell als jener, der schlicht und einfach am meisten geschrieben hat: Von seinem Gesamtwerk erschienen bisher 72 Bände, 2 stehen noch aus und in 10 weiteren Bänden sollen die über 3 000 Briefe verschiedener Briefwechsel erscheinen.

Leonhard Euler hat auch die Art und Weise wie wir Mathematik schreiben stark beeinflusst. Viele Bezeichnungen hat er eingeführt, so zum Beispiel das Summenzeichen, die allgemeine Schreibweise $f(x)$ für den Wert einer Funktion f an einer Stelle x, die Zahl e der Basis des natürlichen Logarithmus (heute als Eulersche Zahl bekannt) sowie die imaginäre Einheit i.

Abb. 2.26 Leonhard Euler (1707–1783) auf einer alten Schweizer Zehnernote

2.7 Zusammenfassung

Ein Experiment wird als ein Zufallsexperiment betrachtet, wenn es mehrere unterschiedliche Endresultate (Ergebnisse) trotz gleicher Startsituation besitzen kann und man nicht voraussagen kann, welches der Ergebnisse auftreten wird. Die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Experiments nennen wir den Ergebnisraum. Die Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten zu den Ergebnissen eines Experiments nennen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Zufallsexperiments. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Zufallsexperiments muss immer die Eigenschaft haben, dass die Summe der Wahrscheinlichkeiten über alle Ergebnisse 1 (Sicherheit) ergibt. Somit sagt man aus, dass wir alle Endresultate (Ergebnisse) des Experiments kennen und eines von ihnen auftreten muss.

Ein Ereignis eines Zufallsexperiments ist eine beliebige Menge von Ergebnissen des Experiments und somit eine beliebige Teilmenge des Ergebnisraums S. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A, die mit $P(A)$ bezeichnet wird, ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten der in A enthaltenen Ergebnisse. Es gilt $P(S) = 1$, weil jede Durchführung eines Experiments mit einem Resultat aus S endet. Ferner gilt $P(\emptyset) = 0$, weil $\emptyset$ kein Endresultat des Experiments enthält und es nicht geschehen kann, dass das Experiment ergebnislos endet. Der Ergebnisraum S und die Wahrscheinlichkeitsverteilung P über S bilden zusammen einen Wahrscheinlichkeitsraum. Für jeden endlichen Wahrscheinlichkeitsraum gelten die oben genannten Prinzipien.[3]

Aus den oben formulierten Prinzipien kann man nützliche Regeln für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten ableiten. Für jedes Ereignis A des Ergebnisraums S ist $\overline{A} = S - A$ das komplementäre Ereignis zu A in S. Weil $A \cup \overline{A} = S$, gilt $P(A) + P(\overline{A}) = P(S) = 1$ und somit $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. Für zwei beliebige Ereignisse A und B aus S gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

[3] Die Mathematiker nennen solche Prinzipien meist Axiome.

2.8 Kontrollfragen

1. Du hast ein Zufallsexperiment, das du modellieren möchtest. Du kennst aber die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse nicht. Wie kannst du vorgehen, um durch Experimentieren diese Wahrscheinlichkeiten zu schätzen?
2. Was ist ein Ergebnisraum? Was ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum?
3. Modelliere durch einen Wahrscheinlichkeitsraum das Experiment des dreifachen Münzwurfs mit fairen Münzen.

Hinweis Du musst den Ergebnisraum beschreiben und jedem Ergebnis seine Wahrscheinlichkeit zuordnen.

4. Gib zwei konkrete Mengen A und B an, die folgende Eigenschaften haben:
   (a) $|A| = 4$, $|B| = 2$ und $|A \cup B| = 5$,
   (b) $|A| = 3$, $|B| = 3$ und $|A \cap B| = 2$,
   (c) $|A| = 7$, $|B| = 4$ und $|A \cup B| = 7$.
5. Erkläre, warum
$$|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$$
für beliebige Mengen A und B gilt.
6. Begründe mit einer Zeichnung, warum
$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$
für beliebige Mengen A und B gilt.
7. Was kann man über A und B sagen, wenn $A \cup B = A$ gilt?
8. Was ist ein Ereignis in einem Wahrscheinlichkeitsraum (S, P)?
9. Wie ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse bestimmt?
10. Was ist das komplementäre Ereignis eines Ereignisses A in einem Wahrscheinlichkeitsraum (S, P)?
11. Warum gilt $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ für jedes Ereignis A eines Wahrscheinlichkeitsraumes (S, P)? Welche Grundprinzipien des Wahrscheinlichkeitsraumes wendest du an, um diese Gleichung zu begründen?
12. Warum fordern wir $P(S) = 1$ und $P(\emptyset) = 0$ in jedem Wahrscheinlichkeitsraum (S, P)?
13. Welches Prinzip der Wahrscheinlichkeitsräume (S, P) wendet man an, um $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$ für alle endlichen Teilmengen A und B von S mit $A \cap B = \emptyset$ zu begründen? Warum gilt $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$ nicht für alle $A, B \subseteq S$?
14. Erkläre, warum die allgemeine Additionsregel (R3) gilt.

2.9 Kontrollaufgaben

1. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse beim zweifachen Werfen eines fairen Würfels.
   (a) Es fallen zwei ungerade Zahlen.
   (b) Es fällt mindestens eine 1.
   (c) Die Summe der Zahlen ist 4.
   (d) Die Summe der Zahlen ist nicht 12.
   (e) Die Summe der Zahlen ist kleiner als 2.
   (f) Die Summe der Zahlen ist höchstens 12.
   (g) Das Produkt der Zahlen ist nicht 12.
   (h) Die zweite Zahl ist nicht das Zweifache der ersten Zahl.
2. Sei $\Omega = (S, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum eines Experiments, in dem alle Ergebnisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Dann gilt

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

   für jedes Ereignis $A \subseteq S$. Begründe dies.
3. Betrachte $\Omega = (S, P)$ mit $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und

$$\begin{aligned} P(1) = P(2) = P(3) &= 0.1, \\ P(4) = P(5) = P(6) &= 0.05, \\ P(7) = P(8) &= 0.15. \end{aligned}$$

   (a) Wenn Ω ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, was muss dann für $P(9)$ gelten?
   (b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine Primzahl gezogen wird.
   (c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass kein Vielfaches von 4 auftritt. Benutze dabei die Regel (R1) über komplementäre Mengen (Gegenereignisse).
4. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erreicht man mit zwei Würfeln in einem Wurf eine Differenz von mindestens 3?
5. Wir betrachten ein Glücksrad, das in 10 gleichgroße Bereiche (Kreissektoren) unterteilt ist. Die Bereiche sind mit den Dezimalziffern von 0 bis 9 beschriftet, siehe Abb. 2.27. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse in einem Zufallsexperiment, bei dem das Glücksrad zweimal gedreht wird. Bestimme zuerst den Wahrscheinlichkeitsraum.
   (a) Bei beiden Drehungen bleibt das Rad bei der Zahl 0 stehen.
   (b) Die Summe der beiden Zahlen ist 8.
   (c) Die beiden Zahlen sind gerade.
   (d) Die Summe der beiden Zahlen ist gerade.
   (e) Die Summe der beiden Zahlen ist höchstens 16.
   (f) Wenn man die beiden Ziffern hintereinander schreibt, bildet die erste Ziffer die Zehnerziffer und die zweite Ziffer bildet die Einerziffer. Wie groß ist die Wahr-

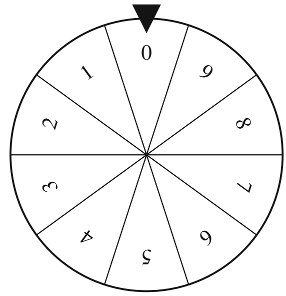

Abb. 2.27 Glücksrad für die zufällige Wahl einer Dezimalzahl

scheinlichkeit, eine Zahl kleiner gleich 30 zu erhalten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zwischen 13 und 37 zu erhalten?

6. Wir haben eine Urne mit weißen, schwarzen und roten Kugeln. Jede einzelne Kugel hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden. Nehmen wir an, wir haben 6 weiße und 3 schwarze Kugeln in der Urne. Gegeben ist eine bestimmte Wahrscheinlichkeit. Bestimme daraus jeweils die Anzahl der roten Kugeln in der Urne.
   (a) Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, ist $\frac{3}{4}$.
   (b) Die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, ist $\frac{1}{2}$.
   (c) Die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, ist $\frac{1}{4}$.
   (d) Die Wahrscheinlichkeit, keine rote Kugel zu ziehen, ist $\frac{1}{2}$.
7. Eine Urne enthält 900 Kugeln mit den Nummern 100, 101, 102, ..., 999. Eine Kugel wird zufällig gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die gezogene Zahl x die folgende Eigenschaft hat:
   (a) x ist durch 100 teilbar.
   (b) x ist duch 10 teilbar.
   (c) x ist nicht durch 25 teilbar.
   (d) x ist nicht durch 5 teilbar.
   (e) x ist größer als 299 und kleiner als 375.
   (f) x ist durch 3 teilbar.
   (g) x ist durch 2 und 5 teilbar.
   (h) x ist durch 2 oder durch 5 teilbar.
8. Bestimme zeichnerisch die folgenden Mengen:
   (a) $(\overline{A \cap B}) \cap B$,
   (b) $(A \cap \overline{B}) \cup (B - A)$,
   (c) $(A \cap B) - (A \cap B \cap C)$,
   (d) $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})$,
   (e) $A - (A \cap B \cap C)$,
   (f) $(B - (A \cup C)) \cup (C \cap (\overline{A \cup B}))$.
9. In einer Klasse gibt es 14 Jugendliche. 9 spielen Tischtennis und 8 Badminton. 7 spielen beides. Wie viele Jugendliche aus der Klasse betreiben keine dieser beiden Sportarten?

10. In einem Jahrgang gibt es 80 Studierende. Es werden zusätzliche, freiwillige Vertiefungskurse in Mathematik, Wirtschaft und Englisch angeboten. 4 Studierende melden sich für alle drei an, 12 melden sich für mindestens zwei Zusatzkurse an. Genau 4 von diesen 12 haben Englisch und Wirtschaft ohne Mathematik gewählt. Es gibt 8 Studierende, die Mathematik und Englisch besuchen wollen. Für Mathematik haben sich insgesamt 10 Studierende angemeldet, 2 davon nur für Mathematik und kein anderes Fach. Für Englisch gibt es insgesamt 24 Anmeldungen. 20 Studierende haben sich nur für Wirtschaft und kein anderes Zusatzfach entschieden. Bestimme die folgenden Zahlen:
    (a) Wie viele Studierende haben sich insgesamt für Wirtschaft angemeldet?
    (b) Wie viele Studierende haben sich Mathematik und Englisch ohne Wirtschaft ausgesucht?
    (c) Wie viele wählen nur das Fach Englisch?
    (d) Wie viele haben sich Mathematik und Wirtschaft ohne Englisch ausgesucht?
    (e) Wie viele haben sich genau zwei Fächer ausgesucht?
    (f) Wie viele haben sich kein Fach ausgesucht?
    (g) Wie viele haben sich genau ein Fach ausgesucht?
11. In einer Urne liegen weiße, rote und schwarze Kugeln. Jede einzelne Kugel hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, ist doppelt so groß wie die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen. Die Wahrscheinlichkeiten, eine weiße Kugel zu ziehen und eine rote Kugel zu ziehen, stehen im Verhältnis 4 zu 3. Bestimme die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse für das Ziehen einer weißen Kugel, einer roten Kugel und einer schwarzen Kugel. Mit welcher kleinsten Anzahl an Kugeln in der Urne kann man diese Verhältnisse zwischen den Wahrscheinlichkeiten erzielen?
12. Du kennst den Wahrscheinlichkeitsraum (S, P) nicht vollständig. Du weißt nur, dass für die zwei Ereignisse A und B

$$\begin{aligned} P\big((\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})\big) &= 0.8, \\ P(\overline{A} \cup \overline{B}) &= 0.9, \\ P(\overline{A}) &= 0.7 \end{aligned}$$

    gilt. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, $A \cap B$, $\overline{A \cup B}$ und $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$.

2.10 Lösungen zu ausgewählten Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 2.1

(a) Beim Roulettespiel gibt es 37 mögliche Resultate und zwar die Zahlen von 0 bis 36. Also ist der Ergebnisraum $\{0, 1, 2, \ldots, 36\}$. Man kann bei einer passenden Wettstrategie auch nur drei Resultate „schwarz“, „rot“ oder „0“ betrachten, wenn nicht auf konkrete Zahlen gesetzt wird. In diesem Fall wäre der Ergebnisraum {schwarz, rot, 0}.

(b) Man kann die Resultate durch Tripel (3-Tupel) repräsentieren. Auf der ersten Position ist das Resultat für den Wurf der 1-CHF-Münze, auf der zweiten das der 1-EUR-Münze und auf der dritten das der 1-KON-Münze. Somit ist der Ergebnisraum

$$\begin{aligned} S = \{&(\mathrm{K},\mathrm{K},\mathrm{K}), \quad (\mathrm{K},\mathrm{K},\mathrm{Z}), \quad (\mathrm{K},\mathrm{Z},\mathrm{K}), \quad (\mathrm{K},\mathrm{Z},\mathrm{Z}), \\ &(\mathrm{Z},\mathrm{K},\mathrm{K}), \quad (\mathrm{Z},\mathrm{K},\mathrm{Z}), \quad (\mathrm{Z},\mathrm{Z},\mathrm{K}), \quad (\mathrm{Z},\mathrm{Z},\mathrm{Z})\}. \end{aligned}$$

Die Darstellung der Ergebnisse darf man sich aussuchen. Eine kürzere Darstellung könnte wie folgt aussehen:

$$S = \{\mathrm{KKK}, \mathrm{KKZ}, \mathrm{KZK}, \mathrm{KZZ}, \mathrm{ZKK}, \mathrm{ZKZ}, \mathrm{ZZK}, \mathrm{ZZZ}\}.$$

(c) Bei einem Fußballspiel betrachten wir drei mögliche Resultate: R – Remis, H – Sieg für die Heimmannschaft (den Gastgeber) und G – Sieg für den Gast. Man könnte auch alle möglichen Resultate wie 3 : 1 oder 2 : 2 betrachten, aber von diesen gibt es unbeschränkt viele und ihre Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen ist fast unmöglich. Bei der zuerst erwähnten Betrachtung ist der Ergebnisraum

$$\begin{aligned} S = \{&\mathrm{RRR}, \quad \mathrm{RRH}, \quad \mathrm{RRG}, \\ &\mathrm{RHR}, \quad \mathrm{RHH}, \quad \mathrm{RHG}, \\ &\mathrm{RGR}, \quad \mathrm{RGH}, \quad \mathrm{RGG}, \\ &\mathrm{HRR}, \quad \mathrm{HRH}, \quad \mathrm{HRG}, \\ &\mathrm{HHR}, \quad \mathrm{HHH}, \quad \mathrm{HHG}, \\ &\mathrm{HGR}, \quad \mathrm{HGH}, \quad \mathrm{HGG}, \\ &\mathrm{GRR}, \quad \mathrm{GRH}, \quad \mathrm{GRG}, \\ &\mathrm{GHR}, \quad \mathrm{GHH}, \quad \mathrm{GHG}, \\ &\mathrm{GGR}, \quad \mathrm{GGH}, \quad \mathrm{GGG}\}. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.3 Die elementaren Ereignisse (Endresultate) des Experiments sind alle Paare

$$(a, b)$$

Augenzahl des weißen Würfels — Augenzahl des roten Würfels

Der Ergebnisraum S ist

$$\begin{aligned} S = \{&(1,1), && (1,2), && (1,3), && (1,4), && (1,5), && (1,6), \\ &(2,1), && (2,2), && (2,3), && (2,4), && (2,5), && (2,6), \\ &(3,1), && (3,2), && (3,3), && (3,4), && (3,5), && (3,6), \\ &(4,1), && (4,2), && (4,3), && (4,4), && (4,5), && (4,6), \\ &(5,1), && (5,2), && (5,3), && (5,4), && (5,5), && (5,6), \\ &(6,1), && (6,2), && (6,3), && (6,4), && (6,5), && (6,6)\}. \end{aligned}$$

Es gibt also $6 \cdot 6 = 36$ Ergebnisse, die alle gleich wahrscheinlich sind. Weil die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses aussagt, in welchem Bruchteil aller Versuche das Ergebnis erwartungsgemäß vorkommt, muss die Summe aller Wahrscheinlichkeiten genau 1 ergeben. Wenn wir 1 in 36 gleich große Bruchteile teilen, erhalten wir die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ der einzelnen Ergebnisse.

Lösung zu Aufgabe 2.5 Beispiele für Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind $\{1, 2, 21\}$, $\{1, 5, 7, 9, 11\}$, $\emptyset$, $\{5\}$, $\{6, 7\}$, $\{n \mid n \text{ ist eine gerade natürliche Zahl}\}$ und $\mathbb{N}$.

Lösung zu Aufgabe 2.6 Wir gehen systematisch vor und zwar von den kleineren Mengen zu den größeren, also nach der Anzahl der Elemente.

- Kein Element: $\emptyset$,
- 1 Element: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$,
- 2 Elemente: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$,
- 3 Elemente: $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$,
- 4 Elemente: $\{1, 2, 3, 4\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.7 Bezeichne $A = \{a, b, c, d, e\}$ die gegebene Menge. Wenn man alle Teilmengen mit 4 Elementen auflisten will, kann man die folgende, einfache Überlegung machen. Jede Teilmenge $B \subseteq A$ mit 4 Elementen enthält alle Elemente von A bis auf eines. Wenn a nicht in B ist, dann ist $B = \{b, c, d, e\}$. Wenn b in B fehlt, dann ist $B = \{a, c, d, e\}$. Wenn man einzeln c, d oder e aus A herausnimmt, erhält man entsprechend die Teilmengen $\{a, b, d, e\}$, $\{a, b, c, e\}$ und $\{a, b, c, d\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.8

(a) $A = \{1, 2, 3\}$ und somit $|A| = 3$ und $B = \{4, 5, 6\}$ und somit $|B| = 3$. Daraus folgt sofort $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und deswegen $|A \cup B| = 6$.

(b) Wir fangen damit an, $A \cup B$ so zu bestimmen, dass $|A \cup B| = 5$ ist. Hierzu wählen wir beispielsweise
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Nun wählen wir A so, dass $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $|A| = 4$ ist, zum Beispiel

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Bisher haben wir nur blind gewählt. Jetzt beginnen wir zu überlegen. B muss das Element 5 enthalten, weil 5 zwar nicht in A, aber in $A \cup B$ liegt. Damit ist schon sichergestellt, dass $A \cup B \supseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gilt. Jetzt wählen wir noch zwei weitere Elemente für B, um $|B| = 3$ zu erhalten, zum Beispiel

$$B = \{3, 4, 5\}.$$

Genauso gut könnten wir aber

$$B = \{1, 2, 5\} \quad \text{oder} \quad B = \{1, 3, 5\}$$

wählen.

(c) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$ und $B = \{a, b, c\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.9

(a) $A \cap B = \{4, 5\}$, weil 4 und 5 diejenigen Elemente sind, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.
(b) $A \cap B = \{1, 3, 5\}$.
(c) $A \cap B = \emptyset$, weil A kein Element enthält. Somit kann auch kein Element in beiden Mengen A und B (in $A \cap B$) sein.
(d) $A \cap B = \emptyset$.

Lösung zu Aufgabe 2.10

(a) Wir wählen zuerst $A \cap B = \{1, 2\}$. Jetzt reicht es, A und B so zu wählen, dass 1 und 2 in beiden Mengen enthalten sind und A und B die gewünschte Anzahl an Elementen besitzen. Wir müssen dabei nur darauf aufpassen, dass wir kein weiteres Element in beide Mengen A und B aufnehmen.
Wählen wir zum Beispiel $A = \{1, 2, 3\}$, so darf 3 nicht in B vorkommen. Also wählen wir in diesem Fall $B = \{1, 2, 4, 5\}$.
(b) Es muss $A \cap B = \emptyset$ gelten, hier gibt es keine andere Wahl. Dann wählen wir beispielsweise $A = \{1, 2, 3, 4\}$ und $B = \{5, 6\}$.
(c) Wir wählen $A \cap B = \{1, 2, 3\}$. Dann muss $A = \{1, 2, 3\}$ gelten. Außerdem setzen wir $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.11 Ist $A \cap B = \emptyset$, so gibt es kein Element, das in beiden Mengen A *und* B gleichzeitig liegt. Die Menge $A \cup B$ besteht aus den Elementen, die in A *oder* in B liegen. Die Elemente in $A \cup B$ können daher einfach dadurch abgezählt werden, dass man zuerst jene von A und dann jene von B zählt und die beiden Zahlen anschließend addiert.

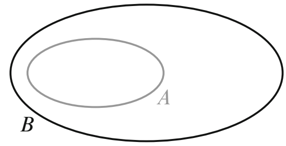

Abb. 2.28 Schematische Darstellung zweier Mengen A und B bei der $A \subset B$ gilt

Lösung zu Aufgabe 2.12 Am besten kann man mit einem Bild argumentieren. Betrachte hierzu Abb. 2.28. Wir sehen, dass

$$A \cap B = A \quad \text{und} \quad A \cup B = B$$

ist. Wir können dies wie folgt in Worten beschreiben: Wenn $A \subseteq B$ gilt, enthält B alle Elemente aus A, also sind alle Elemente aus A auch in B und somit in $A \cap B$.

Lösung zu Aufgabe 2.14 ⋆ Wenn wir $|A|$ und $|B|$ addieren, haben wir damit jedes Element aus $A \cap B$ in der Summe $|A| + |B|$ genau zweimal gezählt: einmal als ein Element aus A und einmal als ein Element aus B. Somit ist $|A|+|B|$ um $|A \cap B|$ größer als $|A \cup B|$, das heißt

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Eine andere Argumentation nutzt den Begriff der Differenz zweier Mengen. Man zerlegt $A \cup B$ in drei paarweise disjunkte Mengen $A - B$, $A \cap B$ und $B - A$ (siehe Abb. 2.29). Also gilt $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ und $(A - B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$ und $(A \cap B) \cap (B - A) = \emptyset$. Somit ist

$$|A \cup B| = |A - B| + |A \cap B| + |B - A|. \tag{2.7}$$

Es gilt $|A - B| = |A| - |A \cap B|$ und $|B - A| = |B| - |A \cap B|$, und wenn wir dies in (2.7) einsetzen, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B| - |B \cap A| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B|. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 2.15

(a) $A - B = \{a, b\}$, $B - A = \{e, h, g\}$,
(b) $A - B = \{1, 2, 3\}$, $B - A = \emptyset$,
(c) $A - B = \{4, 5, 6\}$, $B - A = \emptyset$,
(d) $A - B = \{\text{alle ungeraden natürlichen Zahlen}\}$, $B - A = \emptyset$.

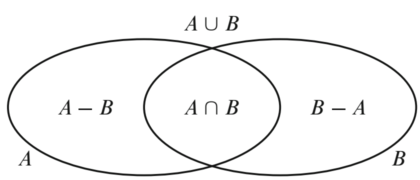

Abb. 2.29 Schematische Darstellung der Teilmengen $A - B$, $A \cap B$, $B - A$ von $A \cup B$

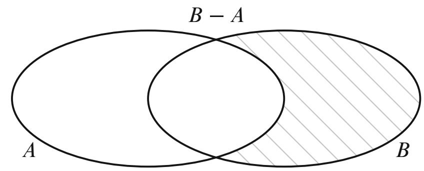

Abb. 2.30 Für die Gleichheit $A \cup B = A$ ist entscheidend ob $B - A = \emptyset$ gilt

Lösung zu Aufgabe 2.16

(a) $A - B = A$, weil B kein Element aus A enthält, also wird nichts abgezogen.
(b) $B - A = B$, weil A kein Element aus B enthält, also wird nichts abgezogen.

Lösung zu Aufgabe 2.19 Sicherlich gilt $A \subseteq A \cup B = A$, also folgt aus $|A \cup B| = |A|$, dass beide Mengen gleich sind. $A \cup B = A$ gilt nur dann, wenn B kein Element enthält, das nicht auch in A vorkommt. Anders ausgedrückt bedeutet dies $B \subseteq A$.

Erklärung mit Abb. 2.30: $A \cup B = A$ gilt genau dann, wenn $B - A$ kein Element enthält. Aber $B - A = \emptyset$ bedeutet, dass alle Elemente aus B auch in A sind, also gilt $B \subseteq A$.

Lösung zu Aufgabe 2.27

(a) $A = \{2, 4, 6\}$,
(b) $A = \{2, 3, 4\}$,
(c) $A = \{3, 6\}$.

Lösung zu Aufgabe 2.28

(a) $A = \{(5,5), (6,5), (5,6), (4,6), (6,4), (6,6)\}$.
(b) $A = \{(6,2), (6,4), (6,6), (2,6), (4,6)\}$.

Hinweis Vergiss hierbei nicht, dass $(6, 2)$ und $(2, 6)$ unterschiedliche Ergebnisse sind.

(c) $A = \{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}$.
(d) $A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.
(e) Alle Paare (2-Tupel) in Abb. 2.18, die links unter der Diagonalen von $(1, 1)$ nach $(6, 6)$ liegen.

Lösung zu Aufgabe 2.30

(a) $P(A) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$,
(b) $P(A) = \frac{5}{36}$,
(c) $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$,
(d) $P(A) = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$,
(e) $P(A) = 15 \cdot \frac{1}{36} = \frac{15}{36}$.

Lösung zu Aufgabe 2.31

(a) $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$, die gefallene Zahl ist ungerade.
(b) $\overline{A} = \{1, 5, 6\}$, die gefallene Zahl ist kleiner als 2 oder größer als 4.
(c) $\overline{A} = \{1, 2, 4, 5\}$, die gefallene Zahl ist nicht durch 3 teilbar.

Lösung zu Aufgabe 2.32

(a) $\{(a, b) \mid a + b < 10\}$, die Summe der gefallenen Zahlen beträgt weniger als 10.
(b) $\{(a, b) \mid a \neq 6 \text{ und } b \neq 6\} \cup \{(6, 1), (6, 3), (6, 5), (5, 6), (3, 6), (1, 6)\}$, alle Doppelwürfe, bei denen entweder keine 6 vorkommt oder sonst einer der Würfel eine 6 und der andere eine ungerade Augenzahl zeigt.
(c) $\{(a, b) \mid a + b \neq 7\}$, die Summe der Augenzahlen ist nicht 7.
(d) $\{(a, b) \mid a \neq b\}$, die zwei gefallenen Augenzahlen sind unterschiedlich.
(e) $\{(a, b) \mid a \leq b\}$, alle Doppelwürfe, bei denen die zweite Augenzahl mindestens so groß wie die erste Augenzahl ist.

Lösung zu Aufgabe 2.33 Der Ergebnisraum ist

$$S = \{(\mathrm{K}, \mathrm{K}, \mathrm{K}), (\mathrm{K}, \mathrm{K}, \mathrm{Z}), (\mathrm{K}, \mathrm{Z}, \mathrm{K}), (\mathrm{Z}, \mathrm{K}, \mathrm{K}), (\mathrm{K}, \mathrm{Z}, \mathrm{Z}), (\mathrm{Z}, \mathrm{K}, \mathrm{Z}), (\mathrm{Z}, \mathrm{Z}, \mathrm{K}), (\mathrm{Z}, \mathrm{Z}, \mathrm{Z})\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit jedes Ereignisses ist $\frac{1}{8}$, weil S acht Ergebnisse enthält und alle gleich wahrscheinlich sind.

Sei A das Ereignis, dass höchstens zweimal Kopf fällt. Dann ist $\overline{A}$ das Ereignis, dass mehr als zweimal Kopf fällt, also

$$\overline{A} = \{(\mathrm{K}, \mathrm{K}, \mathrm{K})\}.$$

Es gilt

$$P(\overline{A}) = \frac{1}{8}$$

und somit

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Lösung zu Aufgabe 2.34

(a) Wir überlegen uns Folgendes:
- A: Das Produkt der geworfenen Augenzahlen ist nicht 24.
- $\overline{A}$: Das Produkt der Augenzahlen ist 24.
- $\overline{A} = \{(4, 6), (6, 4)\}$.
- $P(\overline{A}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.
- $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$.

(b) Wir überlegen uns Folgendes:
- A: Die zweite Augenzahl ist kein Vielfaches der ersten.
- $\overline{A}$: Die zweite Augenzahl ist ein Vielfaches der ersten.
- $\overline{A} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ und somit $|\overline{A}| = 14$.
- $P(\overline{A}) = 14 \cdot \frac{1}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$.
- $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{7}{28} = \frac{11}{18}$.

Lösung zu Aufgabe 2.35 ⋆ Wir überlegen uns Folgendes:

- A: Bei dreifachem Würfeln mindestens eine 5 oder 6.
- $\overline{A}$: Keine Augenzahl 5 oder 6 bei dreifachem Würfeln.
- $\left|\overline{A}\right|$ bezeichnet die Anzahl der Tripel (a, b, c), wobei a, b und c nur aus $\{1, 2, 3, 4\}$ kommen. Wie viele solche Tripel gibt es? Für die erste Position bestehen 4 Möglichkeiten, eine Augenzahl zu wählen, für die zweite und dritte ebenfalls (siehe Kap. 3 für eine ausführliche Erklärung). Somit gilt

$$\left|\overline{A}\right| = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3.$$

- $P(\overline{A}) = \frac{4^3}{6^3} = \frac{2^3 \cdot 2^3}{2^3 \cdot 3^3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$.
- $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$.

Es lohnt sich daher nicht, auf Jans Wette einzugehen, da seine Chance zu gewinnen größer als $\frac{1}{2}$ ist.

Lösung zu Aufgabe 2.37

(a) $A = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$, $P(A) = 3 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{12}$.
(b) $B = \{(4,4), (2,6), (6,2), (3,5), (5,3)\}$, $P(B) = 5 \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$.
(c) $C = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$. Also ist $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{12} + \frac{5}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.
(d) $D = \{(1,1), (1,3), (1,5), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$, $P(D) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.
(e) Wir überlegen uns Folgendes:
- E: Die Summe der Augenzahlen ist nicht 2 oder 11.
- $\overline{E} = \{(1,1), (5,6), (6,5)\}$.
- $P(\overline{E}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.
- $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

Lösung zu Aufgabe 2.41

(a) Es gibt 4 Asse in den 52 Karten. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ass gezogen wird, $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

(b) Wir überlegen uns Folgendes:
- A: Alle Asse.
- B: Alle Kreuzkarten.
- $|B| = 13$ und damit $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.
- $A \cap B = \{\text{Kreuz-Ass}\}$ und somit $P(A \cap B) = \frac{1}{52}$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

(c) Es gibt insgesamt 8 Damen und Könige. Also ist die Wahrscheinlichkeit, entweder einen König oder eine Dame zu ziehen, $\frac{8}{52} = \frac{2}{13}$.

(d) Wir haben 13 Karo-Karten und 4 Damen. In der Schnittmenge liegt nur die Karo-Dame. Also haben wir zusammen $13 + 4 - 1 = 16$ betroffene Karten. Somit ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

(e) Es gibt 9 Zahlen pro Farbe, also insgesamt 36. Also ist die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl zu ziehen, $\frac{36}{52} = \frac{9}{13}$.

http://www.springer.com/978-3-319-57594-0

Stochastik
Diskrete Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik
Barot, M.; Hromkovič, J.
2017, XIII, 383 S. 142 Abb., 10 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-319-57594-0
A product of Birkhäuser Basel