Les travaux de Louis Boutet de Monvel sur les opérateurs pseudodifférentiels et le théorème de l'indice

3

Bernard Malgrange

Les opérateurs pseudodifférentiels (ou « microdifférentiels », comme on dit souvent aujourd'hui) sont la suite des opérateurs intégraux singuliers introduits par Giraud et Tricomi. Ces opérateurs ont été repris et développés par Calderón et Zygmund dans les années 50. Une remarquable application est un théorème d'unicité du problème de Cauchy, dû à Calderón.

Cependant, ces opérateurs sont restés un peu confidentiels avant leur utilisation par Atiyah et Singer dans le calcul de l'indice des opérateurs elliptiques. Leur utilité dans ce sujet tient au fait que l'indice ne dépend que du « symbole » de l'opérateur, et est invariant par sa déformation. On obtient ici une beaucoup plus grande souplesse que si l'on se limitait aux symboles des opérateurs différentiels elliptiques.

Il parut alors naturel d'obtenir une véritable généralisation des opérateurs différentiels, que les opérateurs intégraux singuliers ne généralisaient que très partiellement ; ceci fut l'oeuvre des articles de Kohn-Nirenberg, Bokobza-Unterberger, et Hörmander qui définissent les opérateurs pseudodifférentiels dans le cadre différentiable, et donnent dans ce contexte leurs propriétés de base.

B. Malgrange (✉)
Institut Fourier, UMR 5582, Laboratoire de mathématiques, 100, rue des maths, FR 38402 St Martin d'Hères, France
e-mail: bernard.malgrange@ujf-grenoble.fr

Le premier travail de Louis Boutet de Monvel dans ce sujet est sa thèse [B66a, B66b], consacrée à l'extension de la théorie aux variétés à bord et aux problèmes aux limites elliptiques. Il en tire une démonstration remarquablement simple du théorème d'indice d'Atiyah-Bott relatif aux problèmes aux limites elliptiques [B71].

Le travail suivant de Louis, en collaboration avec Krée [BKr67], consiste en la version analytique des opérateurs pseudodifférentiels. Un résultat-clef est l'inversibilité des opérateurs de symbole principal inversible ; ce résultat est obtenu au moyen d'une majoration très astucieuse. Ce travail donne d'une façon naturelle des noyaux élémentaires analytiques pour les systèmes elliptiques analytiques. Il est une des deux bases de « l'analyse microlocale » à la Sato, (l'autre étant le « faisceau C » de Sato, microlocalisation des hyperfonctions).

Un autre travail important de Louis dans ce domaine est son article sur les opérateurs de Toeplitz et leur indice.[1] Ce sont des opérateurs définis sur le bord B d'un ouvert strictement pseudoconvexe et relativement compact d'une variété analytique-complexe. Ils opèrent sur les fonctions différentiables sur B qui se prolongent en fonctions holomorphes à l'intérieur. En utilisant des résultats antérieurs de Melin-Sjöstrand et de Bou-

[1] Dans une autre direction on pourra aussi citer le livre [BGu81] de Victor Guillemin et Louis, consacré à la théorie spectrale des opérateurs de Toeplitz.

V.W. Guillemin, J. Sjöstrand (eds.), *Louis Boutet de Monvel, Selected Works*, Contemporary Mathematicians, DOI 10.1007/978-3-319-27909-1_3

tet de Monvel-Sjöstrand, respectivement sur les opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe et sur les noyaux de Bergman, il montre que ces opérateurs admettent un calcul identique au calcul des opérateurs pseudodifférentiels, et il donne un théorème d'indice dans ce contexte.

Une conséquence relativement facile de ces résultats est une variante (un peu plus générale) du théorème d'indice d'Atiyah-Singer, et une généralisation de leur théorème de l'indice relatif (c'est-à-dire avec paramètres). Dans le cas général, le théorème est énoncé en termes de D-modules, comme un théorème d'image directe, qui fait intervenir des classes de K-théorie à valeurs dans la variété caractéristique. La démonstration utilise une méthode à la Grothendieck, plongement et projection (comme l'avaient déjà fait Atiyah-Singer). Ce travail [BMa90] est en collaboration avec l'auteur de ces lignes. Je profite de l'occasion pour dire que, outre les préliminaires sur les opérateurs de Toeplitz dont j'ai déjà parlé, la plus grande partie de ce travail est due à Louis. En particulier, la généralisation du théorème de Bott-Thom nécessaire dans la partie « projection » lui est entièrement due. Ma contribution s'est limitée pour l'essentiel à avoir indiqué le type de résultats qu'on cherchait à démontrer. Je tenais à le dire ici.

References

[B66a] Louis Boutet de Monvel, *Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord. I. La propriété de transmission*, J. Analyse Math. **17** (1966), 241–253.

[B66b] L. Boutet de Monvel, *Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord. II. Pseudo-noyaux de Poisson*, J. Analyse Math. **17** (1966), 255–304.

[B71] L. Boutet de Monvel, *Boundary problems for pseudo-differential operators*, Acta Math. **126** (1971), no. 1–2, 11–51.

[BKr67] Louis Boutet de Monvel and Paul Krée, *Pseudo-differential operators and Gevrey classes*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **17** (1967), no. 1, 295–323.

[BGu81] L. Boutet de Monvel and V. Guillemin, *The spectral theory of Toeplitz operators*, Annals of Mathematics Studies, vol. 99, Princeton University Press, Princeton, NJ ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1981.

[BMa90] L. Boutet de Monvel and B. Malgrange, *Le théorème de l'indice relatif*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **23** (1990), no. 1, 151–192.

http://www.springer.com/978-3-319-27907-7

Louis Boutet de Monvel, Selected Works
Guillemin, V.W.; Sjöstrand, J. (Eds.)
2017, VII, 852 p. 16 illus., 9 illus. in color., Hardcover
ISBN: 978-3-319-27907-7
A product of Birkhäuser Basel