Kleine Formelsammlung

zum Buch
Goebbels St. und Ritter St. (2011) Mathematik verstehen und anwenden. Spektrum, Heidelberg

Grundlagen

Logik

Kommutativgesetze: $A \wedge B = B \wedge A, \quad A \vee B = B \vee A$
Assoziativgesetze: $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$
Distributivgesetze: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$, $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
De Morgan'sche Regeln: $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$, $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$
Folgerung: $A \Longrightarrow B := \neg A \vee B$
Äquivalenz: $A \Longleftrightarrow B := (A \Longrightarrow B) \wedge (B \Longrightarrow A)$

Mengenlehre

Kommutativgesetze: $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$
Assoziativgesetze: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributivgesetze: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan'sche Regeln: $\mathcal{C}_G(A \cap B) = (\mathcal{C}_G A) \cup (\mathcal{C}_G B)$, $\mathcal{C}_G(A \cup B) = (\mathcal{C}_G A) \cap (\mathcal{C}_G B)$

Bruchrechnung

Kürzen: $\frac{mp}{mq} = \frac{p}{q}$, $mq \neq 0$
Erweitern: $\frac{p}{q} = \frac{mp}{mq}$, $mq \neq 0$
Addition: $\frac{m}{n} + \frac{p}{q} := \frac{mq+pn}{nq}$
Multiplikation: $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} := \frac{mp}{nq}$
Division: $\frac{\frac{m}{n}}{\frac{p}{q}} := \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$

Potenzrechnung

Ganzzahliger Exponent: $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n\,\mathrm{mal}}$, $x^{-n} := \frac{1}{x^n}$, $x \neq 0$

Produkt von Potenzen: $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $[x^\alpha]^\beta = x^{\alpha\beta}$, $x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$

Binomialkoeffizienten und Kombinatorik

Fakultät: $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \Pi_{k=1}^n k$, $0! := 1$
Binomialkoeffizient: $\binom{n}{m} := \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq m$
Rechenregeln: $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$, $\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}$
Binomischer Lehrsatz: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
Binomische Formeln:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Kombinationen und Variationen:

Reihenfolge	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
unwichtig: Kombinationen	$\binom{n+m-1}{m}$	$\binom{n}{m} := \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$
wichtig: Variationen	n^m	$\frac{n!}{(n-m)!}$

Reelle Zahlen und Funktionen

Euler'sche Zahl: $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = 2{,}7182818\ldots$
Kreiszahl $\pi = 3{,}14159265\ldots$
Dreiecksungleichung: $|a+b| \leq |a| + |b|$
Exponentialfunktion: $\exp(x) := e^x$
Rechenregeln für die Exponentialfunktion:
$\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\exp(y), \quad \exp(xy) = e^{xy} = [e^x]^y = [\exp(x)]^y,$
$\exp(0) = e^0 = 1, \quad \exp(1) = e^1 = e, \quad \exp(-x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\exp(x)}$
Natürlicher Logarithmus: $\ln(\exp(x)) = x$, $x \in \mathbb{R}$; $\exp(\ln(x)) = x, x > 0$
Rechenregeln für den Logarithmus:
$\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy), \quad \ln(x) - \ln(y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right),$
$\ln(1) = 0, \quad \ln(e) = 1, \quad -\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$
Potenz und Logarithmus zur Basis a**:** $a^x = e^{x \ln a}$, $\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$
Hyperbelfunktionen:
$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$, $\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x}$

Trigonometrische Funktionen:
$\sin x =$Gegenkathete/Hypotenuse, $\cos x =$Ankathete/Hypotenuse,
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$.
Umrechnung Winkel α ins Bogenmaß: $\alpha 2\pi/360$
Periode: $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
Umrechnung von Sinus zum Kosinus: $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$
Trigonometrischer Pythagoras: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\sin x - \sin y &= 2\left(\cos\frac{x+y}{2}\right)\left(\sin\frac{x-y}{2}\right)
\end{aligned}$$

Komplexe Zahlen

Rechenregeln: $j^2 = -1$, $(x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$,
$(x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + j(x_1y_2 + y_1x_2)$
Konjugation: $\overline{x+jy} = x - jy$, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
Division: $\frac{x_1+jy_1}{x_2+jy_2} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + j\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$
Betrag: $|x+jy| := \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+jy)\overline{(x+jy)}}$
Polarkoordinaten: $x + jy = re^{j\varphi}$ mit $|e^{j\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$, $r = |x+jy|$,
$\varphi = \arccos\frac{x}{r} = \arcsin\frac{y}{r}$
Multiplikation in Polarkoordinatendarstellung: $r_1e^{j\varphi_1}r_2e^{j\varphi_2} = r_1r_2e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$
Division in Polarkoordinatendarstellung: $\frac{r_1e^{j\varphi_1}}{r_2e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$
Potenzierung in Polarkoordinatendarstellung: $\left[re^{j\varphi}\right]^n = r^ne^{jn\varphi}$
n-te Wurzeln aus $re^{j\varphi}$: $\sqrt[n]{r}e^{j\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $0 \le k < n$
p-q-Formel: $z^2 + pz + q = 0 \Longleftrightarrow z = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ oder $z = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Vektoren

Betrag: $|(a_1, a_2, \ldots, a_n)| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$
Skalarprodukt: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \ldots, b_n)^\top = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

Differential- und Integralrechnung

Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty,\ n>0; \quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x\to\infty} e^x = \infty; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty; \quad \lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

Ableitungen und Integrale

Ableitungen und Stammfunktionen elementarer Funktionen:

Ableitung	Stammfunktion
$\left(x^{k+1}\right)' = (k+1)\,x^k$	$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \quad k \neq -1$
$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$
$(e^x)' = e^x$	$\int e^x\,dx = e^x + c$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + c$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + c$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c$
$(\cosh x)' = \sinh x$	$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$
$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$	$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + c$
$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arsinh} x + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + c$
$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcosh} x + C = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + c, \quad x>1$
$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert<1$	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{artanh} x + c = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + c, \quad \lvert x\rvert<1$
$(\operatorname{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}, \quad \lvert x\rvert>1$	$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arcoth} x + c = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + c, \quad \lvert x\rvert>1.$

Linearität der Ableitung: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (cf)'(x_0) = cf'(x_0)$
Produktregel: $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$

Quotientenregel: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$
Kettenregel: $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$
Ableitung der Umkehrfunktion: $f^{-1\prime}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$
Berechnung mittels Fundamentalsatz: $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$
Linearität des Integrals: $\int_a^b cf(x) + dg(x)\,dx = \int_a^b cf(x)\,dx + \int_a^b dg(x)\,dx$
Partielle Integration: $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$
Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt, \qquad \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_{g^{-1}(\alpha)}^{g^{-1}(\beta)} f(g(x))g'(x)\,dx$$

Laplace-Transformation

Einige Laplace-Transformierte ($f(t) = 0$ für $t < 0$, $\mathrm{Re}(s) > 0$):

Zeitfunktion $f(t)$	Transformierte $F(s)$	Zeitfunktion $f(t)$	Transformierte $F(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\sinh^2(at)$	$\frac{2a^2}{s(s^2-4a^2)}$, $\mathrm{Re}(s) > 2\lvert a\rvert$
$\exp(at)$	$\frac{1}{s-a}$, $\mathrm{Re}(s) > a$	$\cosh^2(at)$	$\frac{s^2-2a^2}{s(s^2-4a^2)}$, $\mathrm{Re}(s) > 2\lvert a\rvert$
$\frac{t^n}{n!}\exp(at)$	$\frac{1}{(s-a)^{n+1}}$, $\mathrm{Re}(s) > a$	$t\sin(\omega t)$	$2\omega\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$t\cos(\omega t)$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\exp(-\delta t)\cos(\omega t)$	$\frac{s+\delta}{(s+\delta)^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}(s) + \delta > 0$
$\sin^2(\omega t)$	$\frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$	$\exp(-\delta t)\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+\delta)^2+\omega^2}$, $\mathrm{Re}(s) + \delta > 0$
$\cos^2(\omega t)$	$\frac{s^2+2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}$	$\frac{\delta\sin(\omega t)-\omega\sin(\delta t)}{\omega\delta(\delta^2-\omega^2)}$	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)(s^2+\delta^2)}$, $\omega \neq \delta$, $\omega, \delta \neq 0$
$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s\sin\varphi+\omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\cos(\omega t)-\cos(\delta t)}{\delta^2-\omega^2}$	$\frac{s}{(s^2+\omega^2)(s^2+\delta^2)}$, $\omega \neq \delta$
$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s\cos\varphi-\omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$	$\frac{\sin(\omega t)-\omega t\cos(\omega t)}{2\omega^3}$	$\frac{1}{(s^2+\omega^2)^2}$, $\omega \neq 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\frac{\sin(\omega t)+\omega t\cos(\omega t)}{2\omega}$	$\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$, $\omega \neq 0$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$, $\mathrm{Re}(s) > \lvert a\rvert$	$\delta(t)$ (siehe	1
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$, $\mathrm{Re}(s) > \lvert a\rvert$		

Rechenregeln:
Linearität:

$$[\mathcal{L}(af(t) + bg(t))](s) = a[\mathcal{L}f](s) + b[\mathcal{L}g](s),\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Streckung:

$$[\mathcal{L}(f(ct))](s) = \frac{1}{c}[\mathcal{L}f]\left(\frac{s}{c}\right),\ c > 0.$$

Dämpfung:
$$[\mathcal{L}(\exp(-at)f(t))](s) = [\mathcal{L}f](s+a),\ a > 0.$$

Ableitung: Sei f zusätzlich stetig differenzierbar auf $[0, \infty[$:

$$[\mathcal{L}(f')](s) = s[\mathcal{L}f](s) - f(0).$$

Für höhere Ableitungen gilt für n-mal auf $[0, \infty[$ stetig differenzierbares f iterativ:

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}(f^{(n)})](s) &= s^n[\mathcal{L}f](s) - f^{(n-1)}(0) - sf^{(n-2)}(0) - \cdots - s^{n-1}f(0) \\ &= s^n[\mathcal{L}f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0).\end{aligned}$$

Faltung:
$$[\mathcal{L}(f * g)](s) = [\mathcal{L}f](s) \cdot [\mathcal{L}g](s),$$

wobei hier die **Faltung** definiert ist über

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-u)g(u)\,du = \int_0^\infty f(t-u)g(u)\,du = \int_{-\infty}^\infty f(t-u)g(u)\,du.$$

Beschreibende Statistik

Arithmetisches Mittel: $\overline{x} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$
Median der Werte x_1, x_2,..., x_n:

$$Z := \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right), & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Empirische Varianz: $s^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$
Empirische Kovarianz der Wertepaare (x_1, y_1), (x_2, y_2),..., (x_n, y_n):

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := s_{xy} := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}).$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Bedingte Wahrscheinlichkeit (Wahrscheinlichkeit, dass E eintritt, wenn bekannt ist, dass F eintritt): $P(E|F) := \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$
Unabhängig Ereignisse: $P(E \cap F) = P(E)P(F)$

Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes für elementfremde Ereignisse E_j, die zusammen Ω ergeben:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A|E_j)P(E_j)$$

$$P(E_k|A) = \frac{P(E_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|E_k)P(E_k)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|E_j)P(E_j)}$$

Hypergeometrische Verteilung: Von N Teilen sind $M \leq N$ markiert. Ohne Zurücklegen werden n gezogen. Davon sind X markiert:

$$P(X = m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

Binomialverteilung: Ereignis tritt X mal bei n unabhängigen Experimenten ein:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Poisson-Verteilung für seltene Ereignisse:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda).$$

Erwartungswert: $E(X) := \sum_{x \in X(\Omega)} x P^X(\{x\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$
Varianz: $\mathrm{Var}\,(X) := E([X - E(X)]^2)$

http://www.springer.com/978-3-8274-3007-6

Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation
Goebbels, S.; Ritter, S.
2013, XII, 948 S. 215 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-8274-3007-6

Springer

http://www.springer.com/978-3-662-57393-8

Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation

Goebbels, S.; Ritter, S.

2018, XIII, 1099 S. 235 Abb., 28 Abb. in Farbe., Softcover
ISBN: 978-3-662-57393-8