Errata zu Goebbels, Ritter: Mathematik verstehen und anwenden

Stand 20. Februar 2013

Wir danken allen Lesern, die uns auf Fehler hingewiesen haben.

Seite	Position	gedruckt	korrekt
36	Beispiel 1.26	$= 0{,}22+$	$= 0{,}12+$
43	Definition 1.12		siehe Anhang 1 im Anschluss an die Tabelle
47	zweiter Satz		In der Mathematik nennt man eine annähernde Berechnung eine **Approximation**.
49	Tabelle 1.5	Griechische Buchstaben	Ausgewählte griechische Buchstaben
77	Definition 1.28	$k \in \mathbb{Z}$	$k \in \mathbb{N}$
101	Zeile 3	$h(0{,}8)$	$h(0{,}65)$
108	Abb. 1.32	$\tan y$	$-\tan y$, der Wert ist positiv, da Quotient zweier negativer Strecken
170	nach erster Formelzeile		Dieser Ansatz klappt, wenn man zu Zeilen ausschließlich Vielfache von vorangehenden Zeilen addiert. Addiert man nachfolgende Zeilen oder vertauscht man Zeilen, erhält man keine linke Dreiecksmatrix. Zu jeder Matrix gibt es eine Umsortierung der Zeilen, für die der Algorithmus funktioniert.
171	Zeile 4	$\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{16}, \frac{17}{8}\right)$	$\left(\frac{9}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{17}{8}\right)$

230	letzte Zeile	$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$	$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$
239	Kasten	besitzt ein größtes	besitzt ein größtes
		n_k, so dass	$n_0 \in \{n_1, \ldots, n_m\}$,
		$\frac{1}{n_k+1} \notin \bigcup_{k=1}^{m}]\frac{1}{n_k}, 1[$	so dass $\frac{1}{n_0+1} \notin \bigcup_{k=1}^{m}]\frac{1}{n_k}, 1[$
244	Zeile 1	$\lvert x\rvert < \pi/2$	$0 < x < \pi/2$
			(für $-\pi/2 < x < 0$ analog)
245	Zeile 25	$]x_0 - \delta, x_0[$	$]x_0 - \delta_0, x_0[$ und die
			Bedingung $\lvert x - x_0\rvert < \delta$
			durch $0 < x_0 - x < \delta$
			ersetzt
245	Zeile 32	$]x_0, x_0 + \delta_0[$	$]x_0, x_0 + \delta_0[$ und die
			Bedingung $\lvert x - x_0\rvert < \delta$
			durch $0 < x - x_0 < \delta$
			ersetzt
248	Zeile 14	$x_n \in D$	$x_n \in D \setminus \{x_0\}$
262	Zeile 11	für $y_0 = a$ oder	in Randpunkten
		$y_0 = b$ einseitige	einseitige
281	Zeile 16	$f(x) \neq 0$	$f(x) > 0$
	Zeile 18	$x \neq k\pi$	$x \in]0, \pi[$
285	Zeile 9	$\frac{df(dx)}{dx} \frac{f'(x_0)\cdot\Delta x}{\Delta x}$	$\frac{df(dx)}{dx} = \frac{f'(x_0)\cdot\Delta x}{\Delta x}$
292	Definition 2.25		$x_1 \neq x_2$
293	Zeile 5		$(k > 1)$
296	Zeile 2	$\lim_{x\to\infty} g(x)$	$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$
311	Zeile 20	Isaac Barrows	Isaac Barrow
338	Zeile 8	$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{x^2}\, dx$	$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \int_1^{n} \frac{1}{x^2}\, dx$
		$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{n-1} = -\frac{1}{n-1} + 1.$	$= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{n} = -\frac{1}{n} + 1.$
338	vor 2.6.7	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_2^{n+1} \frac{1}{x}\, dx$	$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx$
		$= [\ln \lvert x\rvert]_2^{n+1} = \ln \frac{n+1}{2}.$	$= [\ln \lvert x\rvert]_1^{n+1} = \ln(n+1).$
339	Zeile 10	$= \frac{1}{6}$	$= \frac{2}{6}$
341	Zeile 18	Mantelflächen	angenäherte Mantelflächen
343	Satz 2.50	$x \in [a, b]$	$x \in]a, b[$
349	Beweis c)	$f^{(m)}(\xi(x \pm h)) > 0$	$f^{(m)}(\xi(x_0 \pm h)) > 0$
		$f^{(m)}(\xi(x \pm h)) < 0$	$f^{(m)}(\xi(x_0 \pm h)) < 0$

371	vorletzte Zeile	für $x_0 = 0$	für $x_0 = x$
372	Zeile 1	**b)** Sei $0 < r < 1$	**b)** Sei $0 < r < \infty$
402	Zeile 12	$\vec{e}_i \times \vec{e}_i = 0$	$\vec{e}_i \times \vec{e}_i = \vec{0}$
406	vorletzte Zeile	$\vec{a} \times \vec{c} = (0, 1, -1)^\top$	$\vec{a} \times \vec{c} = (0, -1, -1)^\top$
436	Zeile 9	$k > 2$	$k \geq 2$
438	Zeile 24	$(\mathbb{R}, +; \mathbb{R}, \cdot)$	$(\mathbb{R}^n, +; \mathbb{R}, \cdot)$
450	Zeile 17	Jetzt zeigen wir...	siehe Anhang 3 im Anschluss an die Tabelle
459	Zeile 3	$\vec{x}$ lineare	lineare
462	Zeile 10	$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$	$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
496	letzte Zeile	$\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_n}$	$\frac{1}{d_1}, \ldots, \frac{1}{d_n}$
499	letzte Zeile	$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ siehe Anhang 2 im Anschluss an die Tabelle
509	Definition 4.3 (Klammer)	aber f muss in einer vollständigen Umgebung von $\vec{x}_0$ erklärt sein	aber f muss in einer vollständigen Umgebung von $\vec{x}_0$ mit Ausnahme der Stelle $\vec{x}_0$ erklärt sein
518	Definition 4.8ff	Jakobi	Jacobi
518	Definition 4.8	**Jakobi-Matrix** von f	**Jacobi-Matrix** von $\vec{f}$
520	Zeile 14	$(\operatorname{grad} f)(g(t))$	$(\operatorname{grad} f)(\vec{g}(t))$
544	Zeile 18	$[x_{2,l-1}, x_{1,l}]$	$[x_{2,l-1}, x_{2,l}]$
548	Zeile 2	$= 2e$	$= 2(e-1)$
549	Satz 13		Zusätzlich müssen die Integranden die Voraussetzungen von Satz 4.12 erfüllen.
558	Zeile 17	Viertelkugel	Achtelkugel
566	Definition 4.25	$V_2(\vec{x})\, dx_1$	$V_2(\vec{x})\, dx_2$
567	Definition 4.26	$G \subset \mathbb{R}^2$	$G \subset \mathbb{R}^n$
569	Zeile 4	Gebiet beweist man	Gebiet des $\mathbb{R}^3$ beweist man
569	Lemma 4.5	Gebiet	Gebiet $G \subset \mathbb{R}^3$
572	Zeile 13	$\vec{V}(x, y) = (V_1(x), V_2(y))$	$\vec{V}(x, y) = (V_1(x, y),$

			$V_2(x,y))$
573	Beispiel 4.39	$E := [0,1] \times [0,1]$	$E :=]0,1[\times]0,1[$
597	Zeile 1	$\frac{\partial f}{\partial y} f(x,y)$	$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$
625	Zeile 10	$\Longrightarrow \mu(u) = u^{-2}$	$\Longrightarrow \mu(u) = cu^{-2}$
636	Zeile 8	$= \mathbf{A}\,[\vec{y}_1(x) \ldots \vec{y}_1(x)]$	$= \mathbf{A}\,[\vec{y}_1(x) \ldots \vec{y}_n(x)]$
640	Zeile 3	$-(a_2 + 3b_2)e^{-x}$	$+(a_2 - 3b_2)e^{-x}$
	Zeile 9	$a_2 + 3b_2 = 0$	$a_2 - 3b_2 = 0$
	Zeile 10	$b_2 = \frac{1}{6}$	$b_2 = -\frac{1}{6}$
	Zeilen 12/14	$-\frac{3}{8} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}e^{-x}$	$-\frac{3}{8} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}e^{-x}$
657-659			Sowohl Polynomgrad als auch Ordnung der Differenzialgleichung werden mit n bezeichnet, können aber verschieden sein.
665	Zeile 15/16	Gegenkathete ... Ankathete	Ankathete ... Gegenkathete
675	Zeile 22	Eine Periode ist dann gleich $\omega_1 \cdot q = \omega_2 \cdot p$	Eine Periode ist dann gleich $\frac{2\pi}{\omega_1} \cdot p = \frac{2\pi}{\omega_2} \cdot q$
681	Zeile 15		$(\psi_k = \frac{\pi}{2} - \varphi_k)$
688	Zeile 10	Orthogonalbbasis	Orthogonalbasis
707	(6.19)	$\sum_{k=1}^{\infty}$	$\sum_{k=1}^{n}$
712	Definition 6.3	und $\lvert f(t)\rvert$ auf	und $f(t)$ auf
724	Zeile 22	$= 2\pi\big[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)$ $e^{j[-\omega]t}\,dt\big]$	$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{j[-\omega]t}\,dt$
725	Zeile 1	faltet man	multipliziert man
733	Zeile 20	$M\exp((s_0 - s)r)$	$M\exp([s_0 - \mathrm{Re}(s)]r)$
754	Formel (6.43)	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & +j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & +j & -1 & -j \end{bmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & +j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & +j & -1 & -j \end{bmatrix}$

756	Zeile 2	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -j & 1 & +j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +j & 1 & -j \end{bmatrix}$	$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -j & 1 & +j \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & +j & 1 & -j \end{bmatrix}$
762	Zeile 6	$= y_{-3} = y_6 = \cdots = 6$	$= y_{-3} = y_6 = \cdots = 1$
792	Beispiel 6.44	$\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} f\left(\frac{l}{f_a}\right) \cdot$ $\cdot \exp\left(-j2\pi k \frac{l}{f_a}\right)$	$\frac{1}{f_a}\sum_{l=0}^{n-1} f\left(\frac{l}{f_a}\right) \cdot$ $\cdot \exp\left(-j2\pi k \frac{l}{n}\right)$
810	Zeile 3	quater	quarter
810	Zeile 9	bei zwei Modalwerten (spricht man von) einer bimodalen Verteilung	bei zwei deutlichen Verteilungsgipfeln, die nicht gleich groß sein müssen, spricht man von einer bimodalen Verteilung
819	Zeile 18	gibt es in jedem Fall ein (globales) Minimum	kann es ein (globales) Minimum geben
830	Zeile 24	$\lvert\{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}) :$ $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_m\}\rvert$	$\lvert\{(x_1, \ldots, x_m) \in$ $\{1, 2, \ldots, n\}^m :$ $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m\}\rvert$
837	Zeile 19	nur, falls E_2 eintritt	nur, falls F_2 eintritt
866	unten	stochastischer Konvergenz oder schwacher Konvergenz	stochastischer Konvergenz
869	Zeile 5	Standardnormal-verteilung	Normalverteilung
871	Zeile 4	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Y_n + \mu \leq x$	$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} Y_n(\omega) + \mu \leq x$
	Zeile 5	$Y_n \leq \frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	$Y_n(\omega) \leq \frac{x-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$
872	Beispiel 7.49	nicht mehr als ein vorgegebenes ε von π abweicht, kleiner als 0,001 ist	weniger als ein vorgegebenes ε von π abweicht, größer als 0,999 ist
873	Zeile 4	$\Phi(x) \geq 0{,}9995$	$\Phi(x) > 0{,}9995$
875	unten	Eine Schätzfunktion $\hat{\theta}$ heißt **konsistent**	Eine erwartungstreue Schätzfunktion $\hat{\theta}$

			heißt **konsistent**
882	Zeile 12	$0{,}05-2{,}5758\sqrt{\frac{0{,}05\cdot 0{,}95}{2\,000}}\Big]$	$0{,}05+2{,}5758\sqrt{\frac{0{,}05\cdot 0{,}95}{2\,000}}\Big]$
895	Zeile 17	Hachenbacher	Hachenberger

Anhang

1. Präzisierung der Definition 1.12 (S. 43), mit der reelle Zahlen axiomatisch eingeführt werden

Ein Körper $\mathbb{K}$, der als Menge total geordnet ist und für den die Ordnung verträglich mit Addition und Multiplikation ist, d. h. für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} a > b \quad &\Longrightarrow \quad a + c > b + c, \\ a > 0 \wedge b > 0 \quad &\Longrightarrow \quad a \cdot b > 0, \end{aligned}$$

und für den das sogenannte **Vollständigkeitsaxiom** gilt, heißt ein **ordnungsvollständiger geordneter Körper**.
Vollständigkeitsaxiom:

Jede nach oben beschränkte, nicht-leere Teilmenge $E \subset \mathbb{K}$
hat ein Supremum in $\mathbb{K}$.

Man kann zeigen, dass die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ dadurch charakterisiert sind, dass sie einen ordnungsvollständigen geordneten Körper bilden. Sie sind durch diese Eigenschaft im Wesentlichen (bis auf Umbenennung der Zahlen) eindeutig definiert. Es gibt also in diesem Sinne genau eine Zahlenmenge, die ein ordnungsvollständiger geordneter Körper ist, die vorangehenden Axiome legen das Zahlensystem $\mathbb{R}$ fest und beschreiben es komplett. Man kann außerdem zeigen, dass der Körper $\mathbb{Q}$ in diesem Zahlensystem enthalten ist.

2. Korrektur der Rechnung von Seite 499/500

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \left[\mathbf{X} \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Phi} \end{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} \right]^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{X} \begin{bmatrix} \Phi^{n-1} & 0 \\ 0 & \left[-\frac{1}{\Phi}\right]^{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{X}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \Phi & -\frac{1}{\Phi} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^{n-1} & 0 \\ 0 & \left[-\frac{1}{\Phi}\right]^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\Phi} \\ -1 & \Phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \Phi & -\frac{1}{\Phi} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^{n-1} & 0 \\ 0 & \left[-\frac{1}{\Phi}\right]^{n-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \Phi & -\frac{1}{\Phi} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{n-1} \\ -\left[-\frac{1}{\Phi}\right]^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \Phi^n - \left[-\frac{1}{\Phi}\right]^n \\ \Phi^{n-1} - \left[-\frac{1}{\Phi}\right]^{n-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dies ist die **Binet-Formel** für die Fibonacci-Folge. Damit ist aber

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi^n - \left[-\frac{1}{\Phi}\right]^n}{\Phi^{n-1} - \left[-\frac{1}{\Phi}\right]^{n-1}} = \Phi,$$

denn wegen $0 < \frac{1}{\Phi} < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{\Phi}\right]^n = \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{\Phi}\right]^{n-1} = 0$. Damit strebt die Folge der Quotienten $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ tatsächlich gegen den goldenen Schnitt Φ.

3. Verdeutlichung des Beweises von Seite 450, ab Zeile 17

Jetzt zeigen wir, dass $\vec{p}$ der eindeutige Vektor aus U ist, der einen minimalen Abstand zu $\vec{a}$ hat (so dass die vorangehende Definition sinnvoll ist). Dazu sei $\vec{q} \in U$ beliebig gewählt:

$$\begin{aligned}
|\vec{a} - \vec{q}|^2 &= |(\vec{a} - \vec{p}) + (\vec{p} - \vec{q})|^2 = ((\vec{a} - \vec{p}) + (\vec{p} - \vec{q})) \cdot ((\vec{a} - \vec{p}) + (\vec{p} - \vec{q})) \\
&= |\vec{a} - \vec{p}|^2 + |\vec{p} - \vec{q}|^2 + 2(\vec{a} - \vec{p}) \cdot (\vec{p} - \vec{q}),
\end{aligned}$$

wobei der letzte Summand wegen $\vec{p} - \vec{q} \in U$ und $\vec{a} - \vec{p} \perp U$ verschwindet. Damit ist

$$|\vec{a} - \vec{p}|^2 + \underbrace{|\vec{p} - \vec{q}|^2}_{\geq 0} = |\vec{a} - \vec{q}|^2,$$

und wir erhalten $|\vec{a} - \vec{p}| \leq |\vec{a} - \vec{q}|$. Da für $\vec{p} \neq \vec{q}$ sogar $|\vec{a} - \vec{p}| < |\vec{a} - \vec{q}|$ gilt, haben wir auch die Eindeutigkeit des Minimums $\vec{p}$ gezeigt.

http://www.springer.com/978-3-8274-3007-6

Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation
Goebbels, S.; Ritter, S.
2013, XII, 948 S. 215 Abb., Softcover
ISBN: 978-3-8274-3007-6

http://www.springer.com/978-3-662-57393-8

Mathematik verstehen und anwenden – von den
Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und
Laplace-Transformation
Goebbels, S.; Ritter, S.
2018, XIII, 1099 S. 235 Abb., 28 Abb. in Farbe.,
Softcover
ISBN: 978-3-662-57393-8