2 Grundlagen

What is the Matrix?

Thomas A. Anderson

Strukturgleichungsmodelle und andere statistische Verfahren modellieren die Zusammenhänge zwischen Variablen, d. h. zwischen Größen, die die (zumindest prinzipiell) messbaren Eigenschaften politischer Objekte beschreiben. Dabei werden vier SKALENNIVEAUS unterschieden:

1. **Nominalskala:** Die Ausprägungen unterscheiden sich, aber es gibt keine Rangfolge (Wahlabsicht). Variablen, die lediglich zwei Ausprägungen haben (Wähler/Nichtwähler) werden auch als binär oder dichotom bezeichnet. Nominalskalierte Variablen mit mehreren Ausprägungen heißen multinomial oder polytom.
2. **Ordinalskala:** Die Ausprägungen lassen sich in eine Größer-Kleiner-Rangfolge bringen, aber die Abstände zwischen den Kategorien sind nicht identisch („stimme voll zu“, „stimme zu“, „teils/teils“). Nominal- und ordinalskalierte Variablen werden manchmal unter der gemeinsamen Bezeichnung „kategorial“ zusammengefasst.
3. **Intervallskala:** Die Abstände (Intervalle) zwischen den Kategorien sind konstant (Temperatur in Grad Celsius)
4. **Ratioskala:** Die Abstände zwischen den Kategorien sind konstant, und es gibt einen absoluten Nullpunkt (Lebensalter, Stundenlohn in Euro). Intervall- und Ratioskalen werden auch als „metrisch“ bezeichnet.

Je höher das Skalenniveau einer Messung, desto höher auch der Informationsgehalt der entsprechenden Variablen.

K. Arzheimer, *Strukturgleichungsmodelle,* Methoden der Politikwissenschaft,
DOI 10.1007/978-3-658-09609-0_2

Eng verbunden mit dem Skalenniveau ist eine zweite Eigenschaft von Variablen. Diese können entweder diskret oder stetig (kontinuierlich) sein. Diskrete Variablen haben eine abzählbare (wenn auch möglicherweise sehr große) Anzahl von Ausprägungen, während stetige Variablen eine unbeschränkte Zahl von Werten annehmen können. Kategoriale Variablen sind stets diskret, metrische Variablen werden in der Forschungspraxis meist als stetig betrachtet, auch wenn die Zahl der unterschiedlichen Messwerte durch die Messgenauigkeit der Instrumente begrenzt ist (Tutz 2000, S. 3).

Für zusätzliche Verwirrung sorgt oft die Diskrepanz zwischen dem theoretischen Konzept (der latententen Variablen) und dem, was tatsächlich beobachtet werden kann. Praktisch alle sozialwissenschaftlichen Indikatoren (mit der möglichen Ausnahme von physiologischen Größen und Reaktionszeiten) generieren diskrete Werte, während die zugrundeliegenden Konzepte teils diskret (z. B. das Vorliegen einer Parteiidentifikation), teils kontinuierlich (z. B. Fremdenfeindlichkeit) sind.

Lineare Modelle (zu denen die klassischen Strukturgleichungsmodelle gehören) setzten metrische Daten voraus.[1] Darüber hinaus gibt es verschiedene Möglichkeiten, auch nominal- und ordinalskalierte Variablen in einem Strukturgleichungsmodell zu berücksichtigen (siehe Abschn. 4.1). Um die Darstellung nicht zu überfrachten, beziehen sich die folgenden Abschn. 2.1 bis 2.3 aber ausschließlich auf metrische Variablen.

2.1 Matrixalgebra*

Eine MATRIX oder Matrize ist nichts weiter als eine rechteckige Anordnung von reellen Zahlen (Skalaren).[2] Die meisten Leser dürften mit dem Konzept der Rohdatenmatrix vertraut sein, die sich präsentiert, wenn ein Datensatz in Excel, SPSS

[1] Vor allem bei den in der Einstellungsforschung allgegenwärtigen Ratingskalen (vgl. z. B. Tab. 2.1) wird allerdings schlichtweg *angenommen*, dass die Abstände zwischen den Ausprägungen der Variablen konstant sind. Solche Daten werden etwas optimistisch auch als „quasi-metrisch“ bezeichnet.

[2] Für die Zwecke dieses Buches sind Skalare „einfache“ reelle Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen beinhaltet alle Zahlen, die für politikwissenschaftliche Messungen benötigt werden, d. h. positive und negative natürliche Zahlen und Brüche (einschließlich der irrationalen Zahlen wie π). Matrizen, die komplexe Zahlen enthalten, spielen für den Gegenstandsbereich dieses Buches keine Rolle.

Tab. 2.1 Religiösität, Rassimus und Lebensalter

	Alter	Religiosität	Hautfarbe wichtig
Befragter 1	19	0	0
Befragter 2	56	7	6
Befragter 3	71	10	10
Befragter 4	39	5	4

$$= \begin{bmatrix} 19 & 0 & 0 \\ 56 & 7 & 6 \\ 71 & 10 & 10 \\ 39 & 5 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{D}$$

Die Daten wurden willkürlich aus dem deutschen Sample des European Social Survey von 2002 ausgewählt. Die Fragetexte lauten: „Regardless of whether you belong to a particular religion, how religious would you say you are? 0 = not at all religious; 10=very religious" „Please tell me how important you think each of these things should be in deciding whether someone born, brought up and living outside this country should be able to come and live here. How important should it be for them to be white? 0 = extremely unimportant; 10= extremely important"

oder Stata (nach Eingabe von `edit`) geöffnet wird. Bei einer solchen Rohdatenmatrix handelt es sich um den „Kern" einer Rohdatentabelle, d. h. um die numerischen Daten abzüglich der Variablen- und Befragtennamen. Tabelle 2.1 illustriert dies: Die grau unterlegten numerischen Informationen in der Tabelle bilden die Rohdatenmatrix **D**.

Für das Rechnen mit Matrizen gelten besondere Regeln, die als Matrixalgebra bezeichnet werden. Diese ermöglichen es, statistische Probleme in kompakter Form darzustellen und in effizienter Weise zu lösen. Die meisten modernen Programme verfügen über benutzerfreundliche Schnittstellen, so dass es normalerweise nicht mehr notwendig ist, das zu schätzende Modell in Matrixschreibweise zu spezifizieren. Für ein Verständnis der Grundlagen von Strukturgleichungsmodelle sind elementare Kenntnisse der Matrixalgebra aber unabdingbar.

Die Darstellung in diesem Abschnitt beschränkt sich notwendigerweise auf ein Minimum und kann bei der ersten Lektüre übersprungen werden. Eine umfassendere und leicht zugängliche Einführung bietet Namboodiri (1984). Detaillierte und konzise Darstellungen finden sich in den Anhängen der Lehrbücher von Maddala (2001) und Greene (2003). Einen umfassenden Überblick vermittelt Harville (1997).

2.1.1 Dimensionen, Elemente, Vektoren, Submatrizen, Partitionen

Matrizen sind zweidimensionale Gebilde mit den Dimensionen m (Zeilen) und n (Spalten). Die Matrix **D** aus Tab. 2.1 hat $m = 4$ Zeilen und $n = 3$ Spalten, also $4 \times 3 = 12$ Elemente. Als Indizes für die Zeilen und Spalten werden häufig die Kleinbuchstaben i und j verwendet. Indizes ermöglichen es, jedes Element der Matrix eindeutig zu identifizieren. Für die Elemente selbst werden dabei zum Namen der Matrix analoge Kleinbuchstaben verwendet: Das Element $d_{i=2,j=3}$ der Matrix **D** hat den Wert 6. Der Einfachheit halber werden die Kleinbuchstaben oft weggelassen. Wenn m und n kleiner als 10 sind, kann auch das Komma zwischen den beiden Indizes entfallen: $d_{i=2,j=3} = d_{2,3} = d_{23} = 6$. In jedem Fall wird zuerst die Nummer der Zeile, dann die Nummer der Spalte geschrieben (Gl. (2.1)).

$$\text{Elemente einer Matrix:} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$$\text{Spalten- und Zeilenvektoren:} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \ \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_m \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Eine Matrix, die nur eine einzige Spalte hat, wird als Spaltenvektor bezeichnet; eine Matrix, die nur eine einzige Zeile hat, nennt man Zeilenvektor (Gl. (2.2)). Generell können Vektoren als Matrizen mit einer einzigen Dimension m verstanden werden.[3]

Eine $m \times n$ Matrix kann man sich wahlweise als aus m Zeilenvektoren mit jeweils n Elementen oder n Spaltenvektoren mit jeweils m Elementen zusammengesetzt vorstellen. So besteht die Rohdatenmatrix **D** aus vier Zeilenvektoren, die jeweils die Daten eines Falles enthalten. Alternativ dazu lässt sich **D** auch in drei Spaltenvektoren unterteilen, die jeweils die Werte einer Variable enthalten.

$$\text{Partitionierung/Augmentierung von Matrizen:} \quad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:c} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ \hdashline a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{array}\right] \tag{2.3}$$

[3] Verwirrenderweise wird ein Vektor mit m Elementen manchmal auch als m-dimenensionaler Vektor bezeichnet.

Löscht man einzelne Spalten- oder Zeilenvektoren aus einer Matrix, so erhält man eine Submatrix. Im Falle von **D** würden dadurch bestimmte Fälle und/oder Variablen aus dem Datensatz ausgeschlossen. Darüber hinaus ist es möglich, eine Matrix zu partitionieren, indem sogenannte „Blöcke“ gebildet werden, bei denen es sich ihrerseits wieder um Matrizen handelt. Umgekehrt können zwei oder mehrere kleinere Matrizen zu einer größeren Matrix zusammengesetzt werden (siehe Gl. (2.3)). Dies geschieht beispielsweise dann, wenn zu einer Rohdatenmatrix zusätzliche Fälle (beispielsweise aus einem anderen Land) oder zusätzliche Variablen (aus einer zweiten Datenquelle) hinzugefügt werden.

2.1.2 Besondere Matrizen

$$\text{Eine symmetrische Matrix:} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 5 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Matrizen, bei denen die Zahl der Zeilen und Spalten identisch ist, heißen quadratische Matrizen. Diejenigen Elemente einer quadratischen Matrix, die auf einer gedachten Linie von der oberen linken zur unteren rechten Ecke, der sogenannten Hauptdiagonale, liegen ($a_{1,1}, a_{2,2}, \cdots a_{m,m}$) werden als diagonale Elemente bezeichnet. Matrizen, bei denen alle Elemente oberhalb bzw. unterhalb der Diagonale gleich 0 sind, werden als untere bzw. obere Dreiecksmatrizen bezeichnet.

Quadratische Matrizen können (achsen-)symmetrisch sein. In diesem Fall ist der Inhalt der Matrix an der Diagonale gespiegelt, d. h. für jedes Element, das nicht auf der Diagonale liegt, gilt $a_{i,j} = a_{j,i}$ (siehe Gl. (2.4)). Die redundanten Elemente im oberen Dreieck der Matrix werden häufig weggelassen. Die Kovarianz- und Korrelationsmatrizen (siehe Abschn. 2.2), die als Ausgangspunkt für die Schätzung von Strukturgleichungsmodellen dienen, sind stets symmetrisch. Kovarianz- und Korrelationsmatrizen werden deshalb häufig als untere Dreiecksmatrizen geschrieben, was eine kompaktere und übersichtlichere Darstellung ermöglicht.

Matrizen, bei denen alle Elemente außerhalb der Diagonalen den Wert 0 haben, werden als DIAGONALE MATRIZEN bezeichnet. Ein besonderer Typ von diagonalen Matrizen sind die EINHEITSMATRIZEN. Bei einer Einheitsmatrix haben alle Elemente auf der Hauptdiagonalen den Wert 1, alle anderen Elemente den Wert 0. Eine solche Matrix heißt auch Identitätsmatrix, weil das Produkt einer Matrix **A** mit einer Einheitsmatrix wiederum **A** ergibt (vgl. Abschn. 2.1.3). Einheitsmatrizen haben üblicherweise den Namen $\mathbf{I}_m$, wobei der Index für die Zahl der Zeilen/Spalten steht:

$$3 \times 3 \text{ Einheitsmatrix:} \quad \mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

2.1.3 Einfache Matrixoperationen

Das Produkt eines beliebigen Skalars k und einer beliebigen Matrix **A** erhält man, indem man alle Elemente von **A** mit k multipliziert. Das Ergebnis dieser sogenannten SKALARMULTIPLIKATION ist wiederum eine Matrix.

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ka_{1,1} & ka_{1,2} & \cdots & ka_{1,n} \\ ka_{2,1} & ka_{2,2} & \cdots & ka_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m,1} & ka_{m,2} & \cdots & ka_{m,n} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Matrizen, die dieselbe Anzahl Zeilen und Spalten haben, können elementweise addiert oder subtrahiert werden.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} - c_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} - c_{1,2} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} - c_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} - c_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} - c_{2,2} & \cdots & a_{2,n} + b_{2,n} - c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} - c_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} - c_{m,2} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} - c_{m,n} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Eine $m \times n$ Matrix **A** und eine $p \times q$ Matrix **B** können multipliziert werden, wenn die Zahl der Spalten von **A** der Zahl der Zeilen von **B** entspricht. Das Ergebnis dieser sogenannten MATRIXMULTIPLIKATION ist eine neue Matrix mit den Dimensionen $m \times q$. Die einzelnen Elemente dieser Matrix ergeben sich, indem man Elemente der Ausgangsmatrizen miteinander multipliziert und das Ergebnis aufsummiert. Dabei wird die erste Matrix zeilenweise, die zweite Matrix hingegen spaltenweise abgearbeitet und die Ergebnismatrix wiederum zeilenweise aufgebaut (Gl. (2.8)).

Multiplikation zweier Matrizen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 8 + 3 \times 9 & 1 \times 10 + 2 \times 11 + 3 \times 12 \\ 4 \times 7 + 5 \times 8 + 6 \times 9 & 4 \times 10 + 5 \times 11 + 6 \times 12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underline{\underline{50}} & 68 \\ 122 & 167 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Tatsächlich ist die Beschreibung der Matrixmultiplikation viel komplizierter als die Prozedur selbst, wie Gl. (2.8) zeigt. Hier werden die 2×3 Matrix **A** und die 3×2 Matrix **B** miteinander multipliziert. Das erste Element der 2×2 Ergebnismatrix wird bestimmt, indem in Richtung der eingezeichneten Pfeile das erste Element in der ersten Zeile von **A** mit dem ersten Element in der ersten Spalte von **B** multipliziert wird, anschließend das zweite Element der erste Zeile mit dem zweiten Element der ersten Spalte und dann das dritte Element der ersten Zeile mit dem dritten Element der ersten Spalte. Die Summe dieser drei Produkte beträgt 50. Analog dazu wird das zweite Element der ersten Zeile der Ergebnismatrix bestimmt, indem die erste Zeile von **A** mit der zweiten Spalte von **B** multipliziert wird. Das erste Element der zweiten Zeile ergibt sich aus der Multiplikation von zweiter Zeile/erster Spalte, das noch fehlende vierte Element aus der Multiplikation von zweiter Zeile/zweiter Spalte.

Anders als bei der gewöhnlichen Multiplikation von Skalaren sind die Produkte **AB** und **BA** normalerweise *nicht* identisch. In Abhängigkeit von der Zahl der Spalten/Zeilen ist es sogar durchaus möglich, dass **BA** nicht definiert ist, obwohl es sich bei **AB** um eine korrekte Operation handelt. Um Missverständnisse zu vermeiden spricht man deshalb hier auch davon, dass **A** mit **B** postmultipliziert bzw. **B** mit **A** prämultipliziert wird.

Nach der gleichen Logik können statt zweier Matrizen auch zwei Vektoren **a** und **b** miteinander multipliziert werden, sofern beide dieselbe Zahl von Elementen haben. Das Ergebnis dieser Prozedur ist stets ein Skalar; sie wird deshalb auch als SKALARPRODUKT (manchmal auch inneres Produkt oder Punktprodukt) bezeichnet.

Die TRANSPOSITION ist eine einfache Operation, die Zeilen und Spalten einer Matrix vertauscht. Dies wird durch einen hochgestellten Strich symbolisiert.[4] Ein Spaltenvektor wird durch Transposition zum Zeilenvektor und umgekehrt.[5]

$$\text{Transposition einer Matrix:}\quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix},\ \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

2.1.4 Rang und Inverse

Der Rang einer Matrix ist ein komplexes Konzept, dessen Bedeutung hier nur angerissen werden kann. Der Zeilen- bzw. Spaltenrang entspricht der maximalen Zahl der *linear unabhängigen* Zeilen-/Spaltenvektoren, in die eine Matrix zerlegt werden kann. Da Zeilen- und Spaltenrang stets identisch sind, genügt es, hier den Spaltenrang zu betrachten.

Eine Menge von Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots$ ist dann linear unabhängig, wenn keiner der Vektoren als lineare (auf einer gewichteten[6] Addition basierende) Kombination der anderen Vektoren darstellbar ist.

$$\text{Eine quadratische Matrix mit Rang 2:}$$
$$\mathbf{V} = \left[\begin{array}{c:c:c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{array}\right],\ -1 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Matrix $\mathbf{V}$ aus Gl. (2.10) lässt sich durch Partitionierung (Gl. (2.3)) in drei Spaltenvektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ zerlegen. Von diesen drei Vektoren sind aber nur zwei linear voneinander unabhängig, da sich der dritte als Kombination der beiden anderen darstellen lässt ($-1 \times \mathbf{v}_1 + 2 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$ oder $0.5 \times \mathbf{v}_1 + 0.5 \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ etc.). $\mathbf{V}$ hat deshalb den Rang 2.

[4] Manche Textbücher verwenden stattdessen ein hochgestelltes T: $\mathbf{A}'=\mathbf{A}^T$.

[5] Nach einer gängigen Konvention sind Vektoren Spaltenvektoren, sofern sie nicht ausdrücklich als Zeilenvektoren eingeführt werden.

[6] Die „Gewichtung“ bezieht sich hier einfach darauf, dass jeder Vektoren bei der Addition mit einem zusätzlichen Faktor multipliziert werden kann.

Vereinfacht dargestellt ist der Rang ein Maß für den Informationsgehalt einer Matrix. Quadratische Matrizen, bei denen der Rang gleich der Zahl der Spalten bzw. Zeilen ist, haben „vollen" Rang und heißen nicht-singulär oder invertierbar, weil zu ihnen eine INVERSE existiert.

Die Inverse kann als das matrixalgebraische Gegenstück zum Kehrwert eines Skalars betrachtet werden. Multipliziert man einen Skalar k mit seinem Kehrwert $\frac{1}{k} = k^{-1}$, so erhält man den Wert 1. Multipliziert man eine Matrix $\mathbf{A}$, die m Zeilen/Spalten hat, mit ihrer Inversen $\mathbf{A}^{-1}$, so erhält die Einheitsmatrix $\mathbf{I}_m$ (vgl. Gl. (2.5), Seite 18). Das folgende Beispiel illustriert den Zusammenhang:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Noch allgemeiner gilt $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Die Suche nach der Inversen einer Matrix lässt sich prinzipiell als Anwendung einer Serie sogenannter Elementaroperationen rekonstruieren, mit deren Hilfe die Ausgangsmatrix schrittweise in eine Einheitsmatrix transformiert wird. Solche Elementaroperationen 1) vertauschen zwei Zeilen einer Matrix, 2) multiplizieren jedes Element einer Zeile mit einem Skalar ungleich 0 oder 3) fügen zu einer Zeile ein Vielfaches (ungleich 0) einer anderen Zeile hinzu. Implementiert werden diese Elementaroperationen durch Prämultiplikation mit einer Einheitsmatrix, an der die entsprechende Operation bereits vorgenommen wurde (Namboodiri 1984, S. 29). Für die Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ ist dies beispielsweise mit folgenden Schritten möglich (die Matrizen $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ implementieren dabei die Elementaroperationen, $\mathbf{Z}_1$ und $\mathbf{Z}_2$ repräsentieren die Zwischenergebnisse):

1. Das Dreifache der ersten Zeile von zweiter Zeile abziehen:
   $\mathbf{E}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
2. Neue zweite Zeile zu erster Zeile addieren:
   $\mathbf{E}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
3. Neue zweite Zeile mit $-\frac{1}{2}$ multiplizieren:
   $\mathbf{E}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$

$$\mathbf{E}_1 \times \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

$$\mathbf{E}_2 \times \mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$\mathbf{E}_3 \times \mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Die Inverse ergibt sich, indem die verschiedenen Zwischenschritte zusammengefasst werden: $\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 = \mathbf{M}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right)$.

Bei dem hier dargestellten Verfahren handelt es sich um eine Variante der Gauß-Elimination. In der Praxis ist diese Vorgehensweise für größere Matrizen zu aufwendig. Stattdessen werden Computerprogramme verwendet, in denen spezialisierte und sehr effiziente Algorithmen implementiert sind.

Dennoch ist es wichtig, das *Konzept* der Inversen zu verstehen, weil dies für die Anwendung linearer Modelle (zu denen die Strukturgleichungsmodelle zählen) von zentraler Bedeutung ist: Das Invertieren der Kovarianzmatrix ist ein wichtiger Zwischenschritt bei der Berechnung der Parameterschätzungen. Wenn zu einer empirischen Datenmatrix keine Inverse existiert, ist das Modell nicht schätzbar, d. h. nicht „identifiziert“ (vgl. Abschn. 2.6.3, Seite 61). Zu erkennen ist dies in der Regel an einer Fehlermeldung des Programms, die darauf hinweist, dass eine bei der Schätzung verwendete Matrix nicht „positiv-definit“ (und damit u. a. nicht invertierbar, siehe Kline 2010, S. 49–51) ist.

2.2 Kovarianz, Korrelation, Regression

2.2.1 Die Kovarianz: Maß für Zusammenhänge zwischen metrischen Variablen:

Im Beispiel in Tab. 2.1 (Seite 15) liegt der Durchschnittswert der Variable Religiosität bei 5.5 Skalenpunkten; der Mittelwert des Rassismus-Indikators beträgt 5 Skalenpunkte. In beiden Fällen sind die Befragten heterogen, d. h. ihre individuellen Messwerte streuen um den Mittelwert. Ein gängiges (wenn auch nicht sehr anschauliches) Maß für diese Streuung ist die VARIANZ (s^2, vgl. für das folgende Gehring und Weins 2009, Kap. 6.2.2 und 7.4). Zur Berechnung der Varianz wird die Differenz eines Messwertes vom Mittelwert quadriert. Anschließend wird die

http://www.springer.com/978-3-658-09608-3

Strukturgleichungsmodelle
Eine anwendungsorientierte Einführung
Arzheimer, K.
2016, XI, 162 S., Softcover
ISBN: 978-3-658-09608-3